Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2023-2024.
Mercredi 17 Janvier 2024.
Calcul différentiel.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Révisions de cours

Avant cette séance, il est impératif de revoir seul le chapître 12.1 du programme officiel.
Voici un quizz qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions. Vous devez être capables de justifier chaque affirmation Vraie et donner un contre-exemple ou un énoncé corrigé pour chaque affirmation fausse.

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux affirmations suivantes.

Dans tout ce Quizz, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle.

(1) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

(2) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Alors
$$\|f(b)-f(a)\| \leq |b-a| \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|.$$

(3) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1\}$.
Alors il existe $(x_0,y_0) \in D$ tel que $f(x_0,y_0) = \sup_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

(4) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1\}$. Soit $(x_0,y_0) \in D$ tel que $f(x_0,y_0) = \sup_{(x,y)\in D} f(x,y)$.
Alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) = 0$.

(5) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1\}$. Soit $(x_0,y_0) \in D$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) = 0$.
Alors (x_0,y_0) est un extremum local de f.

(6) Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \leq 1\}$. On suppose que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = 1 \Rightarrow f(x,y) = 4.$$
Alors, il existe $(x_0, y_0) \in D$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x_0,y_0) = 0$.

Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$

Exercice 1. [Faire ses gammes]
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose
$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

(1) Déterminer la limite de f en $(0,0)$. En déduire que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ (que l'on note encore f).

(2) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(3) Déterminer les dérivées partielles de f en $(0,0)$.

(4) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

(5) Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. [Faire ses gammes]
Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall (x,y) \neq (0,0),\ f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \text{ et } f(0,0) = 0.$$

(1) Montrer que la restriction de f à toute droite passant par $(0,0)$ est continue.

(2) Pour $a \neq 0$, déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x, ax^2)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 3. [Faire ses gammes]
On définit la fonction f par $f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2 + y^2 - xy}$.

(1) Domaine de définition de f.

(2) Montre que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

(3) Le prolongement obtenu est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Problèmes d'extremum

Exercice 4. [Faire ses gammes]
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note
$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

(1) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(2) La fonction f est-elle majorée sur $\mathbb{R}^2$? minorée sur $\mathbb{R}^2$?
(3) Déterminer les deux points critiques de f.
(4) Déterminer la matrice hessienne de f en chacun de ces deux points critiques et en déduire leur nature locale (maximum local ? minimum local ? point-col ?).
(5) Soit
$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -1,\ x \geq -1 \text{ et } x + y \leq 0\}.$$
  (a) Dessiner T.
  (b) L'ensemble T est-il une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$? une partie fermée de $\mathbb{R}^2$? une partie convexe de $\mathbb{R}^2$? une partie compacte de $\mathbb{R}^2$?
  (c) Montrer que la restriction de f à T possède (au moins) un minimum et un maximum et les déterminer.

Exercice 5. [IAG]
Soit $f\ :(\mathbb{R}^{+*})^n \to \mathbb{R}$ définie par
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_i x_i + \prod_i \frac{1}{x_i}.$$

(1) Montrer que f possède un unique point critique et le déterminer.
(2) Montrer que ce point critique est un minimum global.

Exercice 6. [Minimisation]
Soient $A_1, \ldots, A_p$ des points de $\mathbb{R}^n$, muni de sa structure euclidienne usuelle, et $m_1, \ldots, m_p$ des réels > 0. Pour $M \in \mathbb{R}^n$, on pose
$$f(M) = \sum_{i=1}^{p} m_i \|\overrightarrow{MA_i}\|^2.$$

(1) Montrer que f possède un unique point critique G.
(2) Montrer que $f(G) = \min_{M \in \mathbb{R}^n} f(M)$.
(3) Interprétation physico-géométrique de G ?

Exercice 7. [Faire ses gammes]
Soient $(E, \langle\, ,\, \rangle)$ un espace euclidien et $\|\ \|$ la norme euclidienne associée. Soient a et b deux points distincts de E et $f\ : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$\forall x \in E,\ f(x) = \|x - a\|^2 \|x - b\|^2.$$

(1) Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point x de E.
(2) Déterminer les points critiques de f.
(3) Déterminer la nature de ces points critiques (extremum locaux ? globaux ? points cols ?).

Inégalité des accroissements finis

Exercice 8. [Oral X/ENS 2014]
Soit $f\ : [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $k\in[0,1/\sqrt{2}[$ telle que

$$\forall (x,y)\in[0,1]\times[0,1],\ \|\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x,y)\|\leq k$$

où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Soit $\varphi : [0,1]\to[0,1]$ définie par

$$\forall x\in[0,1],\ \varphi(x)=f(x,x).$$

  (a) Montrer que $|\varphi'(x)|\leq\sqrt{2}k$ pour tout $x\in[0,1]$.

  (b) En déduire qu'il existe un unique $a\in[0,1]$ tel que $f(a,a)=a$.

(2) Soient $(u_0,u_1)\in[0,1]\times[0,1]$ et (u_n) la suite récurrente définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=f(u_n,u_{n+1}).$$

  (a) Soit $v_n=u_{n+1}-u_n$. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}^2\leq k^2(v_{n+1}^2+v_n^2).$$

  (b) En déduire que $\sum v_n$ converge. *On pourra comparer v_n au terme général de la suite récurrente (w_n) définie par*

$$\forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+2}=k^2(w_{n+1}+w_n),\ w_0=v_0^2,\ w_1=v_1^2.$$

  (c) En déduire finalement que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 9. [Faire ses gammes]
Soient $B\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $f\ : M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ f(M)=2M-MBM.$$

(1) Montrer que f est différentiable et déterminer sa différentielle.

(2) Déterminer $f(B^{-1})$ et $df_{B^{-1}}$.

(3) Montrer qu'il existe un voisinage de B^{-1} tel que pour A_0 dans ce voisinage, la suite définie par $A_{k+1}=f(A_k)$ converge vers B^{-1}.

Exercice 10. [Une application de l'I.A.F.]
Soit $f\ : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si $m>n$, alors $f(\mathbb{R}^n)$ est négligeable, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon>0$, $f(\mathbb{R}^n)$ peut être recouvert par une union de boules dont la somme des volumes est $\leq\varepsilon$.

Fonctions implicites

Exercice 11. [Fonctions implicites]
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs > 0 telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = +\infty$.

Montrer qu'il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 12. [Fonctions implicites]
Soient $a < b$ deux réels fixés et soit $f(x,\varepsilon) = (x-a)(b-x) + \varepsilon x^3$.

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ petit, l'équation $f(x,\varepsilon) = 0$ a trois racines $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$ et que les fonctions $\varepsilon \mapsto x_i(\varepsilon)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(2) Déterminer le développement limité à l'ordre 2 lorsque ε tend vers 0.

(3) Déterminer le (début du) développement asymptotique de
$$\varepsilon \mapsto I_\varepsilon = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x,\varepsilon)}}.$$
Indication : poser $u = (x_1(\varepsilon)+x_2(\varepsilon))/2$ et $v = (x_1(\varepsilon)-x_2(\varepsilon))/2$ et effectuer le changement de variables $x = u + v\sin t$.

Un problème de préparation à l'écrit

Fonctions harmoniques et problème de Dirichlet

Ce problème étudie quelques propriétés des fonctions harmoniques ainsi que quelques exemples de telles fonctions.

Notations.

— Soit n un entier strictement positif. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.

— L'opérateur différentiel Δ (appelé laplacien) est défini pour toute fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ par
$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in U,\ \Delta f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x).$$

— Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ à valeurs réelles sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est dite harmonique sur U si
$$\forall x \in U,\ \Delta f(x) = 0.$$
L'ensemble des fonctions harmoniques est noté $\mathcal{H}(U)$.

I. Fonctions harmoniques : quelques propriétés

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}$.

Q 1. Montrer que $\mathcal{H}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.

Q 2. Soit $f \in \mathcal{H}(U)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U, alors toute dérivée partielle $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\cdots\partial x_{i_1}}$ à tout ordre de f appartient à $\mathcal{H}(U)$.

Q 3. On suppose dans cette question que U est convexe. Déterminer l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{H}(U)$ telles que f^2 appartienne aussi à $\mathcal{H}(U)$.

Q 4. Donner une fonction non constante appartenant à $\mathcal{H}(U)$. Le produit de deux fonctions harmoniques est-il une fonction harmonique ?

II. Exemples de fonctions harmoniques

II.A - On cherche dans cette question à déterminer les fonctions harmoniques non nulles sur $\mathbb{R}^2$ à variables séparables, c'est-à-dire les fonctions f s'écrivant sous la forme $f(x,y) = u(x)v(y)$. On se donne donc deux fonctions u et v, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et on pose

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x,y) = u(x)v(y).$$

On suppose que f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

Q 5. Montrer qu'il existe une constante λ réelle telle que u et v soient solutions respectives des équations

$$u'' + \lambda u = 0 \ \text{ et } \ v'' - \lambda v = 0.$$

Q 6. Donner en fonction du signe de λ la forme des fonctions harmoniques à variables séparables.

II.B - Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On pose, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$g(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Q 7. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$.

Q 8. Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$, exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Q 9. Exprimer également $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f en $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Q 10. Montrer que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ si et seulement si, pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}$,

$$r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0.$$

Q 11. Déterminer les fonctions harmoniques radiales de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, c'est à dire les fonctions f appartenant à $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ telles que $(r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ soit indépendante de θ.

Q 12. Soient a, b, r_1, r_2 quatre réels tels que $0 < r_1 < r_2$. Déterminer une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que

$$\begin{cases} \Delta f = 0 \\ f(x,y) = a \ \text{ si } \ \|(x,y)\| = r_1 \\ f(x,y) = b \ \text{ si } \ \|(x,y)\| = r_2. \end{cases}$$

II.C - Dans cette sous-partie II.C, on considère deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, $u \ : \ \mathbb{R}^{*+} \to \mathbb{R}$ et $v \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on pose

$$\forall (r,\theta) \in \ \mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}, \qquad f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = u(r)v(\theta).$$

La fonction f est alors une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dite à variables polaires séparables.

Q 13. Montrer que, si f n'est pas identiquement nulle, alors v est 2π-périodique.

Q 14. Montrer que, si f est harmonique et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, alors il existe un réel λ tel que u soit solution de l'équation différentielle (II.1)

$$\text{(II.1)} \ : \quad r^2 z''(r) + r z'(r) - \lambda z(r) = 0$$

et v soit solution de l'équation différentielle (II.2)

$$\text{(II.2)} \ : \quad z''(\theta) + \lambda z(\theta) = 0.$$

II.C.1) On suppose ici que $\lambda = 0$.

Q 15. Quelles sont les solutions 2π-périodiques de (II.2) ?

Q 16. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q 17. En déduire, dans le cas $\lambda = 0$, les fonctions harmoniques à variables polaires séparables.

II.C.2) On suppose désormais $\lambda \neq 0$.

Q 18. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que (II.2) admette des solutions 2π-périodiques non nulles. Donner ces solutions.

Q 19. Résoudre (II.1) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
On pourra considérer, en justifiant son existence, une fonction Z de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $r > 0$, $z(r) = Z(\ln(r))$.

Q 20. Quelles sont les solutions se prolongeant par continuité en 0 ?

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)   Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

D'après Wikipédia.

Pierre-Simon de Laplace ou Pierre-Simon est un mathématicien, astronome, physicien et homme politique français.
Laplace est l'un des principaux scientifiques de la période napoléonienne. Il a apporté des contributions fondamentales dans différents champs des mathématiques, de l'astronomie et de la théorie des probabilités. Il a été l'un des scientifiques les plus influents de son temps, notamment par son affirmation du déterminisme. Il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique, reprenant et étendant le travail de ses prédécesseurs dans son Traité de Mécanique céleste.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet est un mathématicien prussien qui apporta de profondes contributions à la théorie des nombres, en créant le domaine de la théorie analytique des nombres et à la théorie des séries de Fourier. On lui doit d'autres avancées en analyse mathématique. On lui attribue la définition formelle moderne d'une fonction.

En analyse vectorielle, l'équation de Laplace est une équation aux dérivées partielles elliptique du second ordre, dont le nom est un hommage au physicien mathématicien Pierre-Simon de Laplace.

Introduite pour les besoins de la mécanique newtonienne, l'équation de Laplace apparaît dans de nombreuses autres branches de la physique théorique : astronomie, électrostatique, mécanique des fluides, propagation de la chaleur, diffusion, mouvement brownien, mécanique quantique.
Les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont appelées les fonctions harmoniques.