Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2023-2024.
Mercredi 27 Septembre 2023.
Révisions d'algèbre linéaire.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Révisions de cours

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les paragraphes 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 du programme officiel. Voici un problème qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions : il est posé de façon très progressive et illustre une bonne partie des notions fondamentales utilisées en algèbre linéaire (matrice d'une application linéaire, déterminants, isomorphisme, image d'une base par une application linéaire, coordonnées d'un vecteur dans une base, base duale, interpolation polynomiale).

Déterminants de Vandermonde et polynômes interpolateurs de Lagrange.

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)   Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\beta = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soient n un entier ≥ 1, $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \varphi(P) = \big(P(a_1), \ldots, P(a_n)\big).$$

(1) Montrer rapidement que φ est linéaire.

(2) Déterminer la matrice $A = [\varphi]_{\beta,e}$ de φ dans les bases β et e.

On note

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \det\big((a_i^{j-1})\big).$$

(3) Ecrivons
$$\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i) = X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}\alpha_k X^k.$$
En effectuant l'opération élémentaire
$$C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2}\alpha_k C_{k+1}$$
trouver une relation entre $V_n(a_1,\dots,a_n)$ et $V_{n-1}(a_1,\dots,a_{n-1})$.

(4) En déduire que
$$V_n(a_1,\dots,a_n) = \prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i).$$

(5) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un isomorphisme.

On suppose dorénavant que les a_i sont distincts et on note pour $i \in [\![1,n]\!]$:
$$L_i = \frac{\prod_{j\neq i}(X-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}.$$

(6) (a) Déterminer $\varphi(L_i)$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B} = (L_1,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1,\dots,L_n)$.
   (c) Déterminer la base duale de $(L_1,\dots,L_n)$.

(7) Soient $(b_1,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i. Exprimer ce polynôme à en fonction des b_i et des L_i.

(8) (a) Quelle est la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et e ?
   (b) En déduire sans aucun calcul supplémentaire que la matrice de changement de bases de β à $\mathcal{B}$ est égale à A^{-1}. *Indication :* exploiter $\varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Un quizz

Voici un quizz qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions. Vous devez être capables de justifier chaque affirmation Vraie et donner un contre-exemple ou un énoncé corrigé pour chaque affirmation fausse.

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux affirmations suivantes.

(1) Une réunion de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

(2) Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

(3) Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

(4) Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

(5) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Alors
$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

(6) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Alors
$$AB = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A).$$

(7) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors
$$A^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}(A).$$

(8) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

(9) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

(10) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un convexe de $M_n(\mathbb{R})$.

(11) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

(12) L'ensemble des matrices nilpotentes est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

(13) L'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

(14) Pour toutes matrices $A, B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$,
$$\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B).$$

(15) Pour tous sous-espaces vectoriels F, G d'un espace vectoriel E,
$$\dim(F) \leq \dim(F+G) \leq \dim(F) + \dim(G).$$

(16) Pour tout $p \leq n$, l'ensemble des matrices de rang p est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

(17) Pour tout $p \leq n$, l'ensemble des matrices de rang $\geq p$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

(18) Pour tout $p \geq n$, l'ensemble des matrices de rang $\geq p$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

(19) L'ensemble des matrices de trace ≥ 0 est convexe.

(20) L'ensemble des matrices de trace ≥ 0 est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

(21) L'ensemble des matrices de trace ≥ 0 est ouvert dans $M_n(\mathbb{R})$.

Soient
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(22) Les matrices M et N sont semblables.

(23) Les matrices M et N sont équivalentes.

(24) Je sais calculer sans aucun calcul les puissances des matrices M et N.

Exercices d'application du cours

Les deux premiers exercices permettent de retravailler les notions de noyau et image d'une application linéaire, de sommes (directes) de sous-espaces vectoriels et utilisent le théorème du rang.

Exercice 1. [Autour du théorème du rang]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2.$$

Exercice 2. [Faire ses gammes]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f+g$ est bijectif et $g \circ f = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = E$.

(2) En déduire que $\dim(E) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

(3) Comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.

(4) En déduire finalement que $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Cet exercice très progressif utilise le théorème du rang, vous fait construire une base géométriquement adaptée à un endomorphisme nilpotent et utilise le dictionnaire application linéaire / matrice pour déterminer le commutant d'un endomorphisme.

Exercice 3. [d'après EDHEC 2015]
Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que
$$u \circ u = 0.$$

(1) Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

(2) En déduire que $\mathrm{rg}(u) \leq 2$.

(3) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Soient $e_1 \in E \setminus \mathrm{Ker}(u)$ et $e_2 = u(e_1)$.
   (a) Montrer que $e_2 \in \mathrm{Ker}(u)$ et qu'il existe e_3 et e_4 de sorte que (e_2, e_3, e_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   (b) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base.

(4) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(u) = 2$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
   (b) Soient (e_1, e_2) une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   Montrer qu'il existe deux vecteurs e_3 et e_4 tels que $u(e_3) = e_1$ et $u(e_4) = e_2$ puis montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.
   Déterminer la matrice U de u dans cette base.
   (c) Soit
   $$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$
   le commutant de u.
   En caractérisant la matrice V d'un élément v de $\mathcal{C}(u)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

Cet exercice très élémentaire a pour seul but de vérifier que vous savez ce qu'est un projecteur ou une symétrie et que vous savez déterminer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 4. [Matrices et géométrie]
On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$$
et $D = \mathrm{Vect}(w)$ où $w = (1, 0, -1)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

(1) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

(2) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}$, de q et de s.

Les deux exercices suivants sont fondamentaux et démontrent des résultats généraux sur les noyaux et images des itérés successifs d'un endomorphisme en dimension finie (le théorème du rang joue à nouveau un rôle important). Le cas des endomorphismes nilpotents d'indice de nilpotence maximal est étudié en détail.

Exercice 5. [Noyaux et images emboités]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si k est un entier naturel, on pose $K_k = \mathrm{Ker}\left(f^k\right)$ (comme d'habitude, $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $f^{k+1} = f^k \circ f$) et $F_k = \mathrm{Im}\left(f^k\right)$.

(1) Montrer que $K_k \subset K_{k+1}$ pour tout k.

(2) En déduire qu'il existe un entier $l \leq n$ tel que $K_l = K_{l+1}$.

(3) Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid K_k = K_{k+1}\}$. Montrer que pour tout $k \geq k_0$, alors $K_k = K_{k+1}$.

(4) Montrer que $F_{k+1} \subset F_k$ pour tout k.

(5) En déduire qu'il existe un entier $m \leq n$ tel que $F_m = F_{m+1}$.

(6) Soit $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_k = F_{k+1}\}$. Montrer que pour tout $k \geq k_1$, alors $F_k = F_{k+1}$.

(7) A l'aide du théorème du rang, montrer que $k_0 = k_1$.

(8) *Application numérique.* Traiter le cas de $f\ : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par $f(x,y,z,t) = (y+z, z, 0, 2t)$.

Exercice 6. [Endomorphismes nilpotents]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est **nilpotent**, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $f^m = 0$. On note $N = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$. L'entier N est appelé **indice de nilpotence de** f.

Question préliminaire. A l'aide de l'exercice précédent, montrer que $N \leq n$.
On suppose **dorénavant** que $N = n$.

(1) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

(2) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

(3) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$.

(4) Soit $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ ($C(f)$ est le **commutant** de f).

  (a) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant f^k pour tout k. En déduire que $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}) \subset C(f)$.

  (b) Soit $g \in C(f)$. On écrit $g(x_0) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0)$ dans E et on pose $h = \lambda_0 \,\mathrm{Id}_E + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1} \in \mathcal{L}(E)$.
  Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $g(f^k(x_0)) = h(f^k(x_0))$.
  En déduire que $g = h$.

  (c) Montrer que $C(f) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$. Quelle est la dimension de $C(f)$?

Cet exercice élémentaire vous permet d'illustrer de façon pertinente le dictionnaire application linéaire / matrices et démontre un cas très particulier d'un résultat classique : toute matrice carrée est semblable à sa transposée.

Exercice 7. [Faire ses gammes]
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\varphi\ : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = AM - MA^T.$$

(1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $M_2(\mathbb{R})$.

(2) En déduire le rang de φ, une base de l'image et du noyau de φ.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. En déduire que A et A^T sont semblables.

Nouveautés 2023-2024

Exercice 8. [Un joli exercice sur les endomorphismes nilpotents]
Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\varphi_f\ : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi_f(g) = f \circ g - g \circ f.$$

On note, pour tout entier naturel n non nul, φ_f^n l'application

$$\varphi_f^n = \underbrace{\varphi_f \circ \varphi_f \circ \cdots \circ \varphi_f}_{n \text{ fois } \varphi_f}.$$

De même, on note, pour tout entier naturel k non nul, l'application

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois } f} \in \mathcal{L}(E)$$

et on pose $f^0 = \mathrm{Id}_E$

(1) Vérifier que φ_f est bien un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\forall g \in \mathcal{L}(E),\ \varphi_f^n(g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f^k \circ g \circ f^{n-k}.$$

(3) On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier N tel que $f^N = 0$. Montrer que φ_f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier n tel que $\varphi_f^n = 0$.

(4) On suppose que φ_f est nilpotent et que f n'est pas inversible.

(a) Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \setminus \{0\}$. Pour $g \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, que vaut

$$\varphi_f^n(g)(x)\ ?$$

(b) Montrer que pour tout $y \in E$, il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g(x) = y$.

(c) En déduire que f est nilpotent.

Exercice 9. [Tout ou presque sur les puissances de matrices]
Epreuve EPITA Maths 2, 2023.