Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2023-2024.
Mercredi 28 Juin 2023.

Laurent BONAVERO

Table des matières

---

1. Présentation de la séance

La séance sera articulée autour d'un sujet inspiré de deux écrits de concours : Centrale 2023 filière PSI et Ecole Polytechnique 1988 filière P'. Ce sujet permet de retravailler une bonne partie de l'algèbre linéaire au programme de l'Agrégation Interne. On caractérise les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui préservent le rang.

1.1. Description du sujet.

La **Partie 1** est l'étude d'un exemple. Elle est complètement élémentaire à condition de maitriser les bases de la réduction matricielle.

La **Partie II** consiste à introduire certains endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui s'avèreront être les seuls à conserver le rang. Cette partie est elle aussi très accessible.

La **Partie III** est la plus technique. Elle permet néanmoins de revoir quelques caractérisations classiques des matrices de petit rang. Cette Partie III répond à la question centrale de ce sujet : quels sont les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui préservent le rang ?

1.2. Ce que je vous demande.

Je vous demande de chercher ce sujet, qui vous sera distribué le 21/06.

Pour les **primo-inscrits** : consacrer l'essentiel de votre énergie à traiter les deux premières parties tout en revoyant les parties de cours nécessaires pour les traiter. Si possible, lire la dernière partie et traiter les deux premières questions.
Afin de vous aider, voici les points du programme de l'Agrégation Interne qu'il faut connaitre pour traiter ce sujet :

- calcul matriciel, rang, trace et déterminant d'un endomorphisme ou d'une matrice, polynôme annulateur d'une matrice ou d'un endomorphisme, description des matrices de rang 1,

- réduction des matrices et des endomorphismes : valeurs propres, espaces propres, critères de diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme.

Pour les **chevronnés** : passer 4h en mode concours sur ce sujet. Puis revenir sur les questions non traitées en reprenant votre cours.

1.3. **Ce que je ferai le 28/06.**

Je passerai la séance à discuter de ce sujet, à revenir sur les points fondamentaux du programme de l'Agreg nécessaires pour le traiter. Je vous proposerai aussi quelques compléments en lien avec ce sujet.

1.4. **Me contacter.**

Si vous avez des questions, ne pas hésiter à me contacter par mail :

laurent.bonavero@ac-grenoble.fr

2. Le sujet à traiter

Sur les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui conservent le rang. D'après Centrale 2023, filière PSI et Ecole Polytechnique 1988, filières M' et P'

Laurent Bonavero - Lycée Champollion (Grenoble)

Dans tout ce problème, $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients complexes et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille n à coefficients complexes. On note $I_n \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice identité de taille n.
Si $M \in M_n(\mathbb{C})$, les quantités M^T, $\mathrm{tr}(M)$, $\mathrm{rg}(M)$, $\det(M)$ et $\chi_M = \det(XI_n - M)$ désignent respectivement la transposée, la trace, le rang, le déterminant et le polynôme caractéristique de M.
On note

$$\begin{array}{rccc} \tau : & M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & M^T \end{array}$$

l'application "transposition".

Partie I. Un exemple.

Soient $n \geq 2$ un entier et $u\ : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ u(M) = -M + \mathrm{tr}(M) I_n.$$

(1) Vérifier que u est bien un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$.

(2) Calculer $u^2 = u \circ u$. En déduire un polynôme annulateur de degré 2 de u.

(3) En déduire que u est diagonalisable.
Déterminer les valeurs propres de u, les espaces propres associés et la dimension de chaque espace propre.

(4) En déduire la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de u.

(5) Montrer que u est un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ et déterminer u^{-1}.

(6) Pour $n \geq 3$, trouver une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{rg}(u(M)) = \mathrm{rg}(M)$, une matrice M telle que $\mathrm{rg}(u(M)) < \mathrm{rg}(M)$ et une matrice M telle que $\mathrm{rg}(u(M)) > \mathrm{rg}(M)$.

(7) On suppose dans cette question seulement que $n = 2$.

(a) Montrer que

$$\forall M \in M_2(\mathbb{C}),\ \mathrm{rg}(u(M)) = \mathrm{rg}(M).$$

(b) Déterminer deux matrices $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, de déterminant 1 telles que

$$\forall M \in M_2(\mathbb{C}),\ u(M) = AM^T B.$$

Partie II. Endomorphismes de multiplication à gauche et droites par des matrices inversibles.

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C})$. On dit que φ conserve le rang si

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \mathrm{rg}(\varphi(M)) = \mathrm{rg}(M).$$

Le but de de cette partie et de la suivante est de décrire tous les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui conservent le rang.

Pour $P,Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, on note $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par

$$\Phi_{P,Q} : \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMQ \end{array} \quad \text{et} \quad \Psi_{P,Q} : \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{C}) & \to & M_n(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PM^TQ \end{array}.$$

On pose

$$\mathcal{L}_1 = \left\{\Phi_{P,Q} \mid (P,Q) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))^2\right\} \text{ et } \mathcal{L}_2 = \left\{\Psi_{P,Q} \mid (P,Q) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))^2\right\}.$$

(1) Démontrer que $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition, c'est-à-dire que

$$\forall(\Theta,\Theta') \in (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^2,\ \Theta \circ \Theta' \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2.$$

(2) Soient $P,Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont des automorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ et déterminer leurs applications réciproques.

(b) Montrer que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le rang.

(c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour que $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ conservent le déterminant.

(d) Montrer que $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ conservent le polynôme caractéristique.

(3) (a) Soient $P,Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ M^T = PMQ.$$

Montrer que $Q^{-1} = P$ puis que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ M^TP = PM.$$

Aboutir alors à une contradiction.

(b) En déduire que $\tau \notin \mathcal{L}_1$.

(c) En déduire que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$.

Partie III. Caractérisation des endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui préservent le rang.

Dans toute cette partie, les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont considérés comme des matrices colonnes, c'est-à-dire à des matrices de taille $(n,1)$.

Dans toute cette partie, $\varphi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C}))$ désigne un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ qui préserve le rang.

(1) (a) Montrer que les matrices $M \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 1 sont les matrices de la forme XY^T où X et Y sont deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$.

(b) Montrer que les matrices $M \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 2 sont les matrices de la forme $XY^T + ZW^T$ où X,Y,Z,T sont quatre vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$ tels que les familles (X,Z) et (Y,W) sont libres.

(2) Soient X et Y deux vecteurs non nuls de $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe deux vecteurs U et V de $\mathbb{C}^n$ tels que $\varphi(XY^T) = UV^T$.

(3) Dans cette question, on suppose qu'il existe un vecteur $Y_0 \in \mathbb{C}^n$ non nul vérifiant :

$$\exists(X_0,X_1,U_0,U_1,V_0,V_1) \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})^2 \times (\mathbb{C}^n)^4,\ (U_0,U_1) \text{ est libre et } \left\{\begin{array}{rcl} \varphi(X_0Y_0^T) & = & U_0V_0^T \\ \varphi(X_1Y_0^T) & = & U_1V_1^T \end{array}\right..$$

(a) En considérant $\varphi((X_0+X_1)Y_0^T)$, montrer que la famille (V_0, V_1) est liée.

(b) En déduire que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, il existe un unique $U \in \mathbb{C}^n$ tel que $\varphi(XY_0^T) = UV_0^T$.

(c) En déduire enfin qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \varphi(XY_0^T) = AXV_0^T.$$

(4) Dans cette question, on suppose qu'il existe un vecteur $\tilde{Y}_0 \in \mathbb{C}^n$ non nul vérifiant :

$$\forall (X_0, X_1, U_0, U_1, V_0, V_1) \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})^2 \times (\mathbb{C}^n)^4,\ \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(X_0\tilde{Y}_0^T) & = & U_0V_0^T \\ \varphi(X_1\tilde{Y}_0^T) & = & U_1V_1^T \end{array} \right. \Rightarrow (U_0, U_1) \text{ est liée.}$$

(a) En déduire que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, il existe un unique $V \in \mathbb{C}^n$ tel que $\varphi(X\tilde{Y}_0^T) = U_0V^T$.

(b) En déduire qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \varphi(X\tilde{Y}_0^T) = U_0X^TB.$$

(5) Afin de confronter les hypothèses faites en (3) et (4), on suppose qu'il existe $(Y_0, \tilde{Y}_0) \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})^2$, $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $(U_0, V_0) \in (\mathbb{C}^n)^2$ tels que

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \varphi(XY_0^T) = AXV_0^T \text{ et } \varphi(X\tilde{Y}_0^T) = U_0X^TB.$$

(a) Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la famille $(Y_0, \tilde{Y}_0)$ est libre.

(b) En choisissant $X = A^{-1}U_0$ et $\tilde{X}$ linéairement indépendant de X, étudier le rang de $\varphi(XY_0^T + \tilde{X}\tilde{Y}_0^T)$ et aboutir à une contradiction.

(c) En déduire que les hypothèses faites en (3) et (4) s'excluent mutuellement.

(6) On se place sous l'hypothèse faite en (3) : on suppose qu'il existe un vecteur $Y_0 \in \mathbb{C}^n$ non nul vérifiant

$$\exists (X_0, X_1, U_0, U_1, V_0, V_1) \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})^2 \times (\mathbb{C}^n)^4,\ (U_0, U_1) \text{ est libre et } \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(X_0Y_0^T) & = & U_0V_0^T \\ \varphi(X_1Y_0^T) & = & U_1V_1^T \end{array} \right. .$$

(a) En utilisant (5)(c), montrer que pour tout vecteur Y non colinéaire à Y_0, il existe une matrice inversible A_1 et un vecteur V non colinéaire à V_0 tels que

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \varphi(XY^T) = A_1XV^T.$$

(b) Montrer que pour tout X, $(X, A^{-1}A_1X)$ est liée.
En déduire que A_1 est proportionnelle à A.
En déduire enfin que l'on peut supposer que $A = A_1$ et que le vecteur V est alors unique.

(c) En déduire qu'il existe une matrice B inversible telle que

$$\forall X, Y \in \mathbb{C}^n,\ \varphi(XY^T) = AXY^TB.$$

(d) En déduire que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = AMB.$$

(7) On se place sous l'hypothèse faite en (4). D'après (4)(b), il existe donc $\tilde{Y}_0, U_0 \in \mathbb{C}^n$ et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tels que

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \varphi(X\tilde{Y}_0^T) = U_0 X^T B.$$

Soit $\psi \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \psi(M) = (\varphi(M))^T.$$

(a) Montrer que ψ préserve le rang.

(b) En déduire qu'il existe une matrice A inversible telle que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = AM^T B.$$

(8) Décrire finalement tous les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ qui préservent le rang.