Enseignant : Rémi Molinier
remi.molinier@univ-grenoble-alpes.fr

Algèbre bilinéaire

1 Avant propos

Cette feuille propose des exercices pour un survol approximatif du programme d'agreg interne sur la dualité et l'algèbre bilinéaire mais laisse de coté les notions d'adjoint, d'endomorphisme symétrique et d'isométrie qui seront traitées dans une autre feuille. Elle n'a pas l'ambition d'être exhaustive. Au vu du nombre d'exercices, Il n'est bien sûr pas attendu que vous résolviez l'ensemble de la feuille et d'ailleurs seul une toute petit fraction sera traitée en séance mais je vous invite à la parcourir dans sont intégralité et de piocher par-ci par-là les exercices qui vous titillent le plus.
Dans cette feuille, sans mention du contraire, k sera un corps et pour E un espace vectoriel sur un corps k, on notera E^* l'espace des formes linéaires sur E.

2 Formes linéaires et dualité

Exercice 1 (Espace dual)
Soit E un espace vectoriel.

1. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$ et soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. On considère, pour $1 \leq i \leq n$, l'application
$$e_i^* \colon \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & k \\ \sum \lambda_i x_i & \longmapsto & \lambda_i. \end{array}$$
   (a) Montrer que pour tout i, $e_i^* \in E^*$.
   (b) Montrer que $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ forme une base de E^* (qu'on appelle la **base duale** de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$).
   (c) Expliquer pourquoi la notation e_i^*, bien que très classique, n'est pas forcément judicieuse.
   (d) Montrer que E^* est isomorphe à E.
2. On suppose que $E = k[X]$.
   (a) Montrer que $(k[X])^*$ est isomorphe à $k^{\mathbb{N}}$.
   (b) Si $k = \mathbb{Q}$, justifier que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable alors que $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ non. En déduire que $\mathbb{Q}[X]^*$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Q}[X]$.
   (De façon général on a que $k^{\mathbb{N}}$ n'admet pas de famille génératrice dénombrable et donc $k[X]$ et $k[X]^*$ ne sont jamais isomorphe)
3. On considère l'application $\Psi \colon E \to (E^*)^*$ qui envoie $u \in E$ sur l'application
$$\mathrm{ev}_x \colon \begin{array}{rcl} E^* & \longrightarrow & k \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(x). \end{array}$$
   (a) Montrer que Ψ est bien définie et injective.
   (b) Montrer que c'est un isomorphisme si E est de dimension finie.
   (c) On dit souvent qu'en dimension finie, E et E^* ne sont pas "naturellement isomorphes" alors que E et $(E^*)^*$ oui. Qu'entend-t-on par là ?

Exercice 2 (Bases antéduales et polynômes d'interpolation de Lagrange)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.

1. Soit $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. Montrer qu'il existe une unique base $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ tel que pour tout i, j,
$$\varphi_i(f_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$
(la famille $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est appelé la base **antéduale** de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$).

2. On suppose que $E = k_n[X]$, l'espace des polynômes de degré au plus n et soit $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in k^{n+1}$. Pour $a \in k$ on notera ev_a la forme linéaire
$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_a \colon k[X] &\longrightarrow k \\ P &\longmapsto P(a). \end{aligned}$$
   (a) Montrer que la famille $(\mathrm{ev}_{a_0}, \mathrm{ev}_{a_1}, \dots, \mathrm{ev}_{a_n})$ forme une base de $k_n[X]^*$.
   (b) Donner la base antéduale de $(\mathrm{ev}_{a_0}, \mathrm{ev}_{a_1}, \dots, \mathrm{ev}_{a_n})$.

Exercice 3 (Séparation)
Soit E un espace vectoriel et $x, y \in E$. Montrer que $x = y$ si et seulement si pour tout $\varphi \in E$, $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Exercice 4 (Principes fondamentaux de la dualité)
Soit E une espace vectoriel.

1. Soit A une partie de E. Montrer que $A^\circ = \{\varphi \in E^* \mid \forall a \in A,\ \varphi(a) = 0\}$ est un sous-espace de E^* et que $A^\circ = (\mathrm{Vect}(A))^\circ$.
2. Soit B une partie de E^*. Montrer que ${}^\circ B = \{x \in E \mid \forall \beta \in B,\ \beta(x) = 0\}$ est un sous-espace de E et que ${}^\circ B = {}^\circ(\mathrm{Vect}(B))$.
3. Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces de E. Montrer les propriétés suivantes.
   (a) $\{0\}^\circ = E^*$, $E^\circ = \{0\}$.
   (b) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_2^\circ \subseteq F_1^\circ$.
   (c) $F_1 = {}^\circ(F_1^\circ)$.
   (d) $(F_1 + F_2)^\circ = F_1^\circ \cap F_2^\circ$.
   (e) $(F_1 \cap F_2)^\circ = F_1^\circ + F_2^\circ$.
4. Soit G_1 et G_2 deux sous-espaces de E^*. Montrer les propriétés suivantes.
   (a) ${}^\circ\{0\} = E$, ${}^\circ(E^*) = \{0\}$.
   (b) $G_1 \subseteq G_2 \Rightarrow {}^\circ G_2 \subseteq {}^\circ G_1$.
   (c) $G_1 = ({}^\circ G_1)^\circ$.
   (d) ${}^\circ(G_1 + G_2) = {}^\circ G_1 \cap {}^\circ G_2$.
   (e) $(F_1 \cap F_2)^\circ = F_1^\circ + F_2^\circ$.
5. En considérant $E = k[X]$, montrer que les inclusions 4(c) et 4(e) ne sont pas des égalités en générale.
6. On suppose maintenant que E est de dimension finie.
   (a) Soit F un sous-espace de E. Montrer que
   $$\dim(F) + \dim(F^\circ) = \dim(E).$$
   (b) Soit G un sous-espace de E°. Montrer que
   $$\dim(G) + \dim({}^\circ G) = \dim(E).$$
   (c) en déduire que les inclusions 4(c) et 4(e) sont des égalités en dimension finie.
   (d) En déduire une correspondance bijective décroissante entre les sous-espaces de E et les sous-espaces de E^*.

Exercice 5 (formes linéaires et hyperplans)
Soit E un espace vectoriel.

1. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Montrer qu'on a équivalence entre

   (i) Il existe $\varphi \in E^*$ telle que $H = \ker(u)$,

   (ii) Il existe une droite vectoriel $D \subseteq E$ telle que $E = H \oplus D$.

On rappel qu'un sous-espace vérifiant l'une de ces propriétés équivalentes est appelé un **hyperplan** de E.

2. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0\}$. Montrer que $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$ si et seulement s'il existe $\lambda \in k \setminus \{0\}$ tel que $\varphi_2 = \lambda\varphi_1$.

3. Plus généralement, si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r \in E^*$ est une famille de formes linéaires. Montrer qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est combinaison linéaire des $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ si et seulement si

$$\ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi_1) \cap \ker(\varphi_2) \cap \cdots \cap \ker(\varphi_r).$$

3 Algèbre bilinéaire - Généralités

Exercice 6 (Des exemples !)
Les réponses aux questions suivantes doivent être justifiées. Pour un espace vectoriel E muni d'une forme bilinéaire b et un sous-espace F on notera $F^{\perp}$.

1. Donner un exemple de forme bilinéaire non symétrique en dimension finie et un en dimension infini.
2. Donner plusieurs exemples de formes bilinéaires symétrique non dégénérées pour chacun des espaces vectoriels suivants : k^n (pour $n \geq 1$), $k[X]$, $k^{\mathbb{N}}$, $\mathrm{M}_n(k)$ (pour $n \geq 1$), $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Des exemples de formes bilinéaires symétriques non dégénérée dont le cône isotrope est non nul.
4. Des exemples de formes bilinéaires symétriques dont le cône isotrope n'est pas un sous-espace vectoriel.
5. Des exemples de formes bilinéaires symétriques non dégénérées (dont un exemple avec une forme définie positive) et de sous-espaces F où $(F^{\perp})^{\perp} \neq F$.
6. Des exemples de formes bilinéaires symétriques non dégénérées (dont un exemple avec une forme définie positive) et de sous-espaces F où F et $F^{\perp}$ ne sont pas en somme directe.

Exercice 7 (Vrai ou Faux sur les matrices congruentes)
Pour chacune des items suivants, dire si l'assertion est vraie ou fausse en justifiant.

1. Si deux matrices carrées sont congruentes alors elles ont même rang.
2. Si deux matrices carrées sont congruentes alors elles ont même déterminant.
3. Si deux matrices carrées sont congruentes alors elles ont même trace.
4. Si deux matrices carrées sont congruentes alors elles ont les mêmes valeurs propres.
5. Si $k = \mathbb{C}$, deux matrices symétriques sont congruentes si et seulement si elles ont le même rang.
6. Si $k = \mathbb{R}$, deux matrices symétriques sont congruentes si et seulement si elles ont le même rang.
7. Toute matrice symétrique est congruente à une matrice diagonale.

Exercice 8 (Application linéaire associée à une forme bilinéaire symétrique)
Soient E un espace vectoriel et $b\colon E \times E \to k$ une forme bilinéaire.

1. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} b^*\colon E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto b(x, \cdot) \end{aligned}$$
   est bien définie et linéaire.

2. Montrer que l'application qui envoie une forme bilinéaire b sur l'application linéaire associée b^* définie un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur E et l'espace vectoriel des applications linéaires de E vers E^*.

3. Montrer que b^* est injective si et seulement si b est non dégénérée.

4. Supposons que E est en dimension finie.

   (a) Soient e une base de E et e^* la base duale associée. Quel est le lien entre la matrice de b dans la base e et la matrice de b^* dans les bases e et e^* ?

   (b) Montrer que b^* est un isomorphisme si et seulement si b est non dégénérée. Donner un contre exemple dans le cas où E est de dimension infinie.

   (c) Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit

$$\begin{aligned} \rho_F \colon E^* &\longrightarrow F^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi_{|F} \end{aligned} .$$

   (d) Quel est le noyau de $\ker(\rho_F \circ b^*)$?

   (e) En déduire que si b est non dégénérée, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$. Donner un contre exemple dans le cas où b est dégénérée.

Exercice 9 (EXISTENCE DE BASES ORTHOGONALES)
On se propose de donner une autre démonstration de l'existence d'une base b-orthogonale, lorsque $b : E \times E \to k$ est une forme bilinéaire symétrique, E étant de dimension finie $n \geq 1$ différente de 2 et k de caractéristique différente de 2.

1. Si b est non nulle, montrer l'existence d'un vecteur $e_1 \in E$ tel que $b(e_1, e_1) \neq 0$.

2. Montrer que $E = Ke_1 \oplus (Ke_1)^\perp$.

3. Démontrer par récurrence sur n l'existence d'une base b-orthogonale.

4. Appliquer ce procédé à la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} b_M \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^t M y \end{aligned} \qquad \text{où} \qquad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 (EN PRATIQUE)
Ici $k = \mathbb{R}$. Pour chacune des formes $q \colon E \to \mathbb{R}$ suivantes, montrer que c'est une forme quadratique, donner (dans l'ordre de votre choix) la forme polaire associée, une base orthogonale, le rang, le noyau, la signature et le cône isotrope. Enfin pour le sous-espace F donné, calculer son orthogonal et vérifier si $F \oplus F^\perp = E$ ou non et si $(F^\perp)^\perp = F$ ou non.

1. $E = \mathbb{R}^2$, $q(x) = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$ et $F = \mathbb{R}(1, 1)$.

2. $E = \mathbb{R}^3$, $q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_1 + x_3)^2$ et $F = \mathbb{R}(1, 0, -1)$.

3. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $q(P) = P(2)P(1) + P(1)P(0)$ et $F = \mathbb{R}(1 - X)$.

4. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $q(P) = P(1)^2 - P(0)^2$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$.

5. $E = \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, $q(P) = \det(P)$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 11 (CLASSIFICATION DES FORMES QUADRATIQUES SUR UN CORPS FINI)
Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de caractéristique différente de 2 et $\alpha \in \mathbb{F}_q \setminus (\mathbb{F}_q)^2$. On souhaite montrer que la matrice d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_q^n$ est congruente à l'identité ou à la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Quelques résultats préliminaires.
   (a) Montrer que l'application d'élévation au carré est un morphisme du groupe $(\mathbb{F}_q \setminus \{0\}, \times)$. Quel est son noyau ?
   (b) Montrer qu'il y a exactement $\frac{q-1}{2}$ carré dans $\mathbb{F}_q$.
   (c) En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{F}_q$ il existe $(x, y) \in \mathbb{F}_q^2$ tel que $ax^2 + by^2 = 1$.
2. Etudier le cas $n = 1$.
3. Montrer le résultat pour $n = 2$.
4. Montrer le résultat pour tout $n \geq 1$ par récurrence.
5. Combien existe-t-il de classes de congruence de matrices symétriques $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{F}_q$?

4 Espaces prehilbertiens et euclidiens

Exercice 12 (Vrai ou Faux sur les espaces préhilbertiens)
Pour chacune des entrées suivants, dire si l'assertion est vraie ou fausse en le justifiant.

1. Une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel de dimension finie E est un produit scalaire si et seulement si il existe une base orthonormée.
2. Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien, alors pour tout sous-espace F de E, on a $F \oplus F^{\perp} = E$.
3. Si $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ est un espace préhilbertien, alors pour tout sous-espace F de E, on a $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
4. Si une forme bilinéaire symétrique n'est que positive, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'est pas forcément vérifiée.
5. À k fixé et dimension finie fixé, il n'existe qu'un seul espace euclidien "à isomorphisme près".

Exercice 13 (Calcul de distances)
Calculer les quantités suivantes.

1. $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \left((1-a-b)^2 + (1-3a+b)^2 + (1-2a-b)^2\right)$.
2. $\inf\limits_{a,b,c\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (t^3 - a - bt - ct^2)^2 \mathrm{d}t\right)$.
3. $\inf\limits_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} (a_{ij} - m_{ij})^2\right)$ où $n \geq 1$, $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est le sous-espace des matrices symétriques.

Exercice 14 (Projection et estimateur des moindres carrés)
Soit $n \geq 1$ un entier, et soient $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

1. Calculer les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ qui réalisent
$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2\right).$$
2. Interpréter le résultat précédent en terme de régression linéaire.

Exercice 15 (Un exemple de polynômes orthogonaux : les polynômes de Laguerre)
On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \in \mathbb{R}$
$$h_n(x) = x^n e^{-x} \qquad \text{et} \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} h_n^{(n)}(x).$$

1. Montrer que L_n est une fonction polynômiale. Quel est son degré et son coefficient dominant ?

Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose
$$b(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx.$$

2. Montrer que b est bien définie et donne un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Calculer $b(L_0, X)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ il existe $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$h_n^{(k)}(x) = x^{n-k}e^{-x}Q_k(x).$$
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ on a
$$b(L_n, P) = \frac{(-1)^p}{n!} \in_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(x)P^{(p)}(x)dx.$$
6. En déduire que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de $(\mathbb{R}[X], b)$.

Exercice 16 (Inégalités)
Démontrer les inégalités suivantes et étudier les cas d'égalités.

1. Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$,
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right) \leq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$
2. Pour tout $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
$$\sum_{k=1}^{n} x_i x_{\sigma(i)} \leq \sum_{k=1}^{n} x_i^2.$$
3. Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,
$$\operatorname{tr}(AB)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$
4. Pour tous $a < b$ et toute fonction continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$, on a
$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}dt\right).$$