Université Grenoble Alpes
Année 2023/2024
Agrégation interne

Exercice 1. *Soit* $\mathcal{T}$ *une tribu sur un ensemble* Ω *et* Ω' *une partie de* Ω. *Vérifier que* $\mathcal{T}' = \{A \cap \Omega', A \in \mathcal{T}\}$ *définit une tribu sur* Ω'.

Exercice 2. *Soient* $f : \Omega \to \Omega'$ *une application et* $\mathcal{T}'$ *une tribu sur* Ω'. *Montrer que*

$$\mathcal{T} = \{f^{-1}(A'), A' \in \mathcal{T}'\}$$

est une tribu sur Ω.

Exercice 3.

1. *Soit* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *une famille de tribu sur un même ensemble* Ω. *Montrer que*

   $$\mathcal{T} = \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$$

   est une tribu sur Ω.
2. *Soit* $\mathcal{S}$ *une partie de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *et* $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ *la famille de toutes les tribus de* Ω *contenant les éléments de* $\mathcal{S}$.
   Vérifier que

   $$\mathcal{T} = \cap_{i\in I}\mathcal{T}_i$$

   est une tribu contenant les éléments de $\mathcal{S}$ *et que c'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) vérifiant cette propriété. (On dit que* $\mathcal{T}$ *est la tribu engendrée par* $\mathcal{S}$.*)*

Exercice 4. *Soit* Ω *un ensemble non dénombrable.*

1. *Montrer que la famille* $\mathcal{B}$ *formée des parties* A *de* Ω *telles que* A *ou* $\Omega \setminus A$ *est dénombrable est une tribu sur* Ω.
2. *Montrer que* $\mathcal{B}$ *est la tribu engendrée par les singletons de* Ω.
3. *Montrer que l'application*

   $$P : \mathcal{B} \to \{0,1\} A \mapsto 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable}, 1 \text{ si } \Omega\backslash A \text{ est dénombrable}$$

   est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$.

Exercice 5. *Soit P une probabilité sur* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P(\{n\}) = 0.$$

Exercice 6. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite strictement décroissante de réels positifs de limite nulle.*
Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ *vérifiant*

$$P(\{n, n+1, \ldots\}) = \lambda a_n.$$

Exercice 7. *Dans une population, la probabilité qu'une famille ait n enfants est estimée par la valeur*

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \text{ avec } \lambda = 2.$$

En supposant les sexes équiprobables et l'indépendance des sexes des enfants à l'intérieur d'une même famille, donner une estimation de la probabilité qu'une famille ait au moins une fille.

Exercice 8. *On répète successivement et indépendamment une expérience qui a la même probabilité de réussir que d'échouer. Pour $n \geq 2$, on introduit les évènements ;*
A_n="On obtient deux succès consécutifs lors des n premières expériences.
B_n="On obtient le premier couple de succés consécutifs aux rangs $n-1$ et n.
Enfin on pose $p_n = P(B_n)$ et $p_1 = 0$.

1. *Calculer p_2, p_3 et p_4.*
2. *Pour $n \geq 2$, vérifier que*

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \text{ et } p_{n+3} = \frac{1}{8}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\right).$$

3. *En déduire une relation entre p_{n+3}, p_{n+2} et p_n valable pour $n \geq 1$.*
4. *Exprimer le terme général de la suite $(p_n)_{n\geq1}$.*

Exercice 9. *Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et pour $s > 1$,*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. *Pour quels $\lambda \in \mathbb{R}$ la famille $(\frac{\lambda}{n^s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?*
2. *Pour p un nombre premier, on pose $A_p = p\mathbb{N}^*$. Montrer que les A_p pour p parcourant $\mathcal{P}$ sont mutuellements indépendants pour la loi du probabilité précédente.*
3. *Prouver*
$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}.$$
4. *La famille $(\frac{1}{p})_{p\in\mathcal{P}}$ est-elle sommable ?*

Exercice 10. *On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si*

$$X(\Omega) = \{n, n+1, \dots\} \text{ et } P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}.$$

1. *Vérifier que P vérifie bien une probabilité.*
2. *Soient X_1, $X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.*
   Montrer que $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.
3. *en déduire l'espérance et la variance d'une loi binomiale négative de paramètres n et p*

Exercice 11. *Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de "six" obtenus. Il met de côté les dès correspondants et relance les autres dès (s'il en reste). On note X_2 le nombre de "six" obtenus et on répète l'expérience définissant une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$.*
La variable $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ correspond alors au nombre de "six" obtenus après n lancers.

1. *Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*
2. *Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.*
3. *On définit alors la variable aléatoire*
$$T = \min\{n \geq 1, S_n = N\} \cup \{+\infty\}.$$
   Déterminer la loi de T.

4. *Vérifier que T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci. La calculer pour $N = 1$ et $N = 2$.*

Exercice 12. *Dans une urne figurent N boules numérotées de 1 à N ($N \geq 2$). Dans celle-ci on opère des tirages successifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de k boules consécutives identiques ($k \geq 2$). On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.*

1. *Déterminer $P(T = k)$ et $P(T = k + 1)$.*
2. *Soit $n \geq 1$, établir*

$$P(T = n + k) = \frac{N-1}{N^k} P(T > n).$$

3. *En déduire que la variable T admet une espérance et la déterminer.*

Exercice 13. *Soit X et Y deux variables aléatoires réelles admettant chacune une variance. On suppose $V(X) > 0$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant la quantité*

$$E((Y - (aX + b))^2).$$

Exercice 14. *Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Le bruit est modélisé par une variable B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion le signal reçu est $X = S + B$.*
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S i.e tel que l'espérance $E((Y - S)^2)$ soit minimale.

Exercice 15. *Soit (U, V) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale de paramètre 2 et $1/2$.*

1. *Montrer que la somme de n variables réelles indépendantes qui suivent la loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0, 1[$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.*
2. *On pose $S = (U - 1)^2 + (V - 1)^2$. Déterminer la loi de S.*

3. *On pose* $T = (U-1)(V-1)+1$. *Calculer* $E(S(T-1))$. *Déterminer la loi de* T. *Calculer la covariance de* (S,T). *Les variables* S *et* T *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 16. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre* $p \in]0,1[$.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 17. *Soit* X *une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$. *Déterminer la probabilité que la valeur de* X *soit pair.*

Exercice 18. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoire indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre* p *et* $q \in]0,1[$.
Calculer $P(X < Y)$.

Exercice 19. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On suppose que X *suit une loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$ *et que la loi de* Y *sachant* $X = n$ *est binomiale de paramètres* n *et* $p \in]0,1[$.

1. *Déterminer la loi conjointe de* (X,Y).
2. *Reconnaître la loi de* Y.

Exercice 20. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X *et* Y *vérifie*

$$P(X = j, Y = k) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. *Déterminer la valeur de* a.
2. *Reconnaître les lois marginales de* X *et de* Y.
3. *Les variables* X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*

Exercice 21. *Soit* X *et* Y *deux variables aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X *et* Y *vérifie*

$$P(X = j, Y = k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

1. *Déterminer la valeur de a.*
2. *Reconnaître les lois marginales de X et de Y.*
3. *Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
4. *Calculer $P(X = Y)$.*

Exercice 22. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$.*
Si $np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ alors

$$P(X_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Exercice 23. *Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la condition d'absence de mémoire :*

$$\forall n, k \in \mathbb{N},\ P(X > n + k | X > n) = P(X > k)$$

alors X suit une loi géométrique.

Exercice 24. *Soit $X = Y + 1$ où Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer le taux de panne $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (P((X = n)|(X \geq n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de S puis vérifier que cette suite a une limite que l'on calculera.*

Exercice 25. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.*

1. *Calculer*
$$E(X(X-1)\dots(X-r+1)).$$
2. *Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.*

Exercice 26.
1. *Pour $|x| < 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$, écrire le développement en série entière de $\frac{1}{1-x}$ puis de*
$$\frac{1}{(1-x)^r}.$$
2. *Montrer que ce développement se réécrit en*
$$\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+r-1}{k} x^k.$$

3. *Soit* $p \in]0,1[$ *et* $q = 1-p$*. Pour* $k \in \mathbb{N}$ *on note*

$$p_k = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k.$$

Montrer que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *définit une loi de probabilité sur* $\mathbb{N}$*.*

4. *Soit* X *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{N}$ *telle que* $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p_k$*.*
   Déterminer la fonction génératrice de X*. (On rappelle que* $G_X(t) = E(t^X)$*)*
5. *En déduire* $E(X)$ *et* $V(X)$*.*

Exercice 27. *Soit* $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec* X_n *suivant une loi de Bernouilli de paramètre* p_n*.*
Montrer que pour tout $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \epsilon\right) = 1.$$

Exercice 28. *On jette* n *fois de suite et de façons indépendantes un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Pour* $k \in [[1,n]]$*, on note* X_k *la variable aléatoire égale au chiffre du kième lancer et* M_n *le maximum (resp.* m_n *le minimum) des variables* X_k *pour* $k \in [[1,n]]$*.*

1. *Déterminer la loi de* X_k*.*
2. *Exprimer la fonction de répartition* F_n *de* M_n *en fonction de la fonction de répartition* F *de* X_k*.*
3. *Déterminer la limite de la suite de fonction* $(F_n)_n$ *lorsque* $n \to +\infty$*. La convergence est-elle uniforme ?*
4. *Déterminer la fonction de répartition* G_n *de* m_n *en fonction de* F*.*

Exercice 29. *Soit* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

1. *Soit* S_n *une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre* n *et* $x \in]0,1[$ *et* $X_n = \frac{S_n}{n}$*.*
   Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n*. Justifier*

$$\forall \alpha > 0,\ P(|X_n - x| > \alpha) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

2. *On introduit la variable aléatoire* $Y_n = f(X_n)$ *et on pose* $B_n(f)(x) = E(Y_n)$. *Vérifier que* $B_n(f)$ *est une fonction polynôme de la variable* x.
   Soit $\epsilon > 0$. *On rappelle que la fonction* f *étant continue sur* $[0,1]$, *elle y est uniformément continue (Heine). Ceci garantit l'existence de* $\alpha > 0$ *vérifiant*
   $$\forall (x,y) \in [0,1]^2, (|y-x| \leq \alpha) \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \epsilon.$$
   De plus la fonction f *étant continue sur un segment, elle y est bornée par un réel noté* M.
3. *Avec les notations ci-dessus montrer que*
   $$\left| \sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} \left(f(\frac{k}{n}) - f(x) \right) P(X_n = \frac{k}{n}) \right| \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$$
   et
   $$\left| \sum_{|\frac{k}{n}-x|\leq\alpha} \left(f(\frac{k}{n}) - f(x) \right) P(X_n = \frac{k}{n}) \right| \leq \epsilon.$$
4. *Conclure qu'à partir d'un certain rang, on a*
   $$\forall x \in [0,1], |B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\epsilon.$$
   Quel théorème a t on démontré ?