Université Grenoble Alpes
Année 2023/2024
Agrégation interne

Exercice 1. *Montrer que* $\phi : n \in \mathbb{Z} \mapsto \begin{cases} 2n \text{ si } n \geq 0 \\ -2n-1 \text{ si } n < 0 \end{cases}$ *est bijective.*
En déduire que $\mathbb{Z}$ *est dénombrable.*

Exercice 2.

1. *Montrer que* $\phi : (n, m) \in \mathbb{N}^2 \mapsto 2^n(2m+1) - 1$ *est bijective de* $\mathbb{N}^2$ *sur* $\mathbb{N}$.
2. *Montrer que* $\phi : (n, m) \in \mathbb{N}^2 \mapsto \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1)$ *est bijective de* $\mathbb{N}^2$ *sur* $\mathbb{N}$.

Exercice 3. *Soit* A *une partie d'un ensemble* E *à* n *éléments de cardinal* p.

1. *Combien y-a-t-il de parties* X *de* E *contenant* A.
2. *Combien y-a-t-il de parties* X *de* E *à* m *éléments* ($p \leq m \leq n$) *contenant* A *?*
3. *Combien y-a-t-il de couples* (X, Y) *de parties de* E *tel que* $X \cap Y = A$ *?*

Exercice 4. *Soit* E *un ensemble à* n *éléments. Calculer*

$$\sum_{X \subset E} Card(X) \text{ et } \sum_{X, Y \subset E} Card(X \cap Y).$$

Exercice 5. *Soient* E *et* F *deux ensembles finis de cardinaux respectifs* n *et* p.
Combien y a t-il d'injections de E *dans* F *?*

Exercice 6. *Soient* $E = \{1, \cdots, n\}$ *et* $F = \{1, \cdots, p\}$ *avec* $n \leq p \in \mathbb{N}$.
Combien y a t-il d'applications strictement croissantes de E *dans* F *?*

Exercice 7. *Soient* p, $q \in \mathbb{N}$ *et* $n \in [\![0, p+q]\!]$. *Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité*

$$\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}.$$

en déduire

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Exercice 8. *Soient $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = [[1, n+1]]$ et $1 \leq p \leq n$.*

1. *Soit $k \in [[p, n]]$. Quel est le nombre de parties à $(p+1)$ éléments de I_{n+1} dont le plus grand élément est $k+1$?*
2. *En utlisant ce qui précède, montrer que*
$$\binom{p+1}{n+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{p}{k}.$$
On peut aussi montrer ce résultat par récurrence sur n à p fixé.
3. *Calculer $S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p$ pour $p = 1, 2$ ou 3.*

Exercice 9. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g_k.$$
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k.$$
(On peut faire une démonstration en utilisant de l'algèbre linéaire ou par récurrence)

Exercice 10. *Pour $n \geq 1$, on appelle dérangement de $I_n = [\![1, n]\!]$ toute permutation σ de I_n n'ayant aucun point fixe (i.e $\forall i \in I_n$, $\sigma(i) \neq i$).*
Pour tout entier n on note δ_n le nombre de dérangement de I_n ($\delta_0 = 1$ par convention).
Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_{n-k}.$$
En déduire que
$$\delta_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 11. *On se propose de montrer la formule $\delta_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ en utilisant la série entière $\sum \frac{\delta_n}{n!} z^n$.*

1. *Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{\delta_n}{n!} z^n$ est supérieure à égale à 1. On notera $S(z)$ sa somme.*

2. *Montrer que pour $|z| < 1$, on a $S(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$.*
3. *En déduire le résultat.*

Exercice 12. *Pour $p \geq n$ on désigne par $u_{p,n}$ le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments en convenant que $u_{p,0} = 0$.*

1. *Montrer que la série entière $\sum \frac{u_{p,n}}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On notera $S_p(z)$ sa somme.*
2. *Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a $e^z S_p(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^p}{n!} z^n$ puis en déduire que*
$$\forall p \geq n \geq 1,\ u_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^p.$$
3. *Montrer que*
$$\forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n = n!$$
pui que
$$\forall p \geq n \geq 2, u_{p,n} = n(u_{p-1,n-1} + u_{p-1,n}).$$
En déduire les valeurs de $u_{n+1,n}$ et $u_{n+2,n}$.

Exercice 13. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X l'ensemble des suites $(x_1, \ldots, x_n)$ avec*
$$\forall k \in [[1, n]], x_k = 1 \text{ ou } 1.$$
A chaque suite $x = (x_1, \ldots, x_n)$ élément de X on associe la suite $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ avec
$$s_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } s_k = s_{k-1} + x_k,\ k \in [[1, n]].$$
Celle-ci détermine une ligne brisée déterminée par les points de coordonnées (k, s_k).

1. *On note p le nombre de 1 dans la suite $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X$. Exprimer en fonction de n, p et s_0 la valeur de s_n.*
2. *Etant donnée $m \in \mathbb{N}$, combien existe t il de chemin $s_n = m$?*
3. *On suppose $s_0 \in \mathbb{N}$. Expliquer pourquoi il y a autant de chemins joignant $(0, -s_0)$ à (n, m) que de chemins joignant $(0, s_0)$ à (n, m) et coupant l'axe des abscisses. (On pourra s'aider d'un dessin.*
4. *En déduire le nombre de chemins joignant $(0, 1)$ à (n, m) dont tous les points sont d'ordonnées strictement positives.*