Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2023-2024.
Devoir de calcul différentiel.

Laurent BONAVERO

Ce sujet vient en complément des écrits blancs des vacances de Noël. Il n'est pas suffisamment long pour un vrai sujet d'Agreg Interne. En revanche, il aborde des thématiques au programme de l'Agreg Interne et qui posent souvent des problèmes à beaucoup de candidats. Je vous invite à le travailler et à me le rendre au plus tard le 17 Janvier.

Problème : autour des difféomorphismes

Ce problème traite des difféomorphismes entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. La Partie I traite un exemple explicite, la Partie II propose une démonstration du théorème d'inversion locale dont l'énoncé est explicitement au programme. On utilise ce théorème dans la Partie III pour démontrer une version $\mathcal{C}^1$ à paramètre du théorème de point fixe de Picard.

Partie préliminaire : Vrai/Faux.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera la réponse en quelques lignes.

(1) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction bijective et continue sur I. Alors $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.

(2) Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors $f^{-1} : J \to I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J.

(3) Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Alors la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

(4) Soit $\|\cdot\|$ une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Alors la fonction $x \mapsto \|x\|$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

(5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

Alors f possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

(6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq 1/2.$$

Alors f possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

Partie I. Généralités et un exemple.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, soient U un ouvert de E, V un ouvert de F et $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On rappelle que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V si :

- f est bijective,
- f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

(1) Soit $f : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur V. Exprimer la différentielle de f^{-1} en fonction de celle de f. En déduire que $\dim(E) = \dim(F)$.

(2) *La dimension un.*
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective. A quelle condition nécessaire et suffisante la fonction f est-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ?

(3) *Un exemple.*
Soit $E = F = \mathbb{R}^n$ que l'on munit de la structure euclidienne usuelle. Soient $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall x \in U,\ f(x) = x + \frac{x}{\|x\|^2}.$$

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer sa différentielle.

(b) Soit $W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}$. Montrer que W est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que f induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de W sur un ouvert V à déterminer.

Partie II. Le théorème d'inversion locale.

Dans toute cette partie, $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème d'inversion locale suivant.

Théorème d'inversion locale.
Soit $f : U \to V$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ entre deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que $df(a)$ soit inversible.
Alors, il existe des voisinages ouverts U_a de a et V_b de $b = f(a)$ tels que f induise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_a sur V_b.

(1) Montrer que l'on peut supposer, ce que l'on fera dans toute la suite, que $a = b = 0$ et $df(a) = I_n$.

(2) Soit g la fonction définie par : $\forall x \in U,\ g(x) = f(x) - x$.
Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in \overline{B}(0,2r), \forall h \in \mathbb{R}^n,\ \|dg(x)(h)\| \leq \frac{\|h\|}{2}.$$

En déduire que $g(\overline{B}(0,2r)) \subset \overline{B}(0,r)$.

(3) Soient $y \in B(0,r)$ et h la fonction définie sur $\overline{B}(0,2r)$ par :

$$\forall x \in \overline{B}(0,2r),\ h(x) = y - g(x).$$

Montrer que $h(\overline{B}(0,2r)) \subset \overline{B}(0,2r)$.

Montrer que pour tout $x, x' \in \overline{B}(0,2r)$, $\|h(x) - h(x')\| \leq \frac{1}{2}\|x - x'\|$.
En déduire que h possède un unique point fixe $x \in B(0,2r)$.
En déduire que f induit une bijection de $U_0 = B(0,2r) \cap f^{-1}\big(B(0,r)\big)$ sur $B(0,r)$.

(4) On note $f^{-1} : B(0,r) \to U_0$ la bijection réciproque.
Montrer que f^{-1} est 2-lipschitzienne.
Montrer que pour tout $y = f(x)$ proche de 0,

$$\lim_{k \to 0} \frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - (df(x))^{-1}(k)\|}{\|k\|} = 0.$$

(5) Conclure.

Partie III. Un théorème de point fixe différentiable.

Dans toute cette partie, $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme $\|\cdot\|$.
Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on note $\partial_1 f(t,x)$ la dérivée partielle de f par rapport à t au point (t,x) et $\partial_2 f(t,x)$ la différentielle partielle de f par rapport à x au point (t,x).
On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $|||\partial_2 f(t,x)||| \leq k$.

(1) Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x(t) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f\big(t, x(t)\big) = x(t)$.

(2) Montrer que pour tout $t, t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\|x(t) - x(t_0)\| \leq \frac{1}{1-k} \|f\big(t, x(t_0)\big) - f\big(t_0, x(t_0)\big)\|.$$

En déduire que $t \mapsto x(t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(3) Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ la fonction définie par

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ g(t,x) = \big(t, f(t,x) - x\big).$$

(a) Montrer que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, la différentielle de g en (t,x) est inversible.

(b) En utilisant le théorème d'inversion locale au voisinage d'un point de la forme $\big(t_0, x(t_0)\big)$, montrer que $t \mapsto x(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(4) Déterminer $x'(t)$ en fonction des différentielles partielles de f.

(5) *Application numérique.*
Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & \sin(y) + e^t - 1 \\ 3y & = & \cos(x) - 8e^{4t} + 7 \end{array} \right.$$

possède une unique solution $\big(x(t), y(t)\big) \in \mathbb{R}^2$ et que l'application $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Calculer $x'(0)$ et $y'(0)$.