Rectorat de Grenoble / Université Grenoble Alpes

Préparation à l'agrégation interne 2023-2024

Devoir à la maison à rendre le 6 septembre 2023

Structures symplectiques.

Notations

- Dans tout le problème, n et m désignent des entiers naturels non nuls.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients réels et I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Pour tous entiers naturels non nuls p et q, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Ainsi, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à n lignes et $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe linéaire réel d'ordre n (matrices carrées inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices de déterminant égal à 1 :
$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(\mathrm{A}) = 1\}$$
- On note $\mathrm{A}^\top$ la transposée d'une matrice A.
- Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et la norme euclidienne associée sont notés respectivement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\| \cdot \|$.
- Le groupe orthogonal réel d'ordre n est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$:
$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{A}^\top \mathrm{A} = \mathrm{I}_n\right\}$$
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes de E, $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ le groupe des endomorphismes inversibles de E et $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

Objectif

Ce problème a pour objectif de définir la notion d'espace symplectique réel et d'étudier certaines propriétés des endomorphismes symplectiques de $\mathbb{R}^n$.
La première partie établit quelques résultats utiles dans la suite.
La deuxième partie définit des notions relatives aux objets symplectiques utilisés dans la suite du problème.
La troisième partie vise à montrer que toute matrice symplectique réelle a un déterminant égal à 1 et se conclut par un théorème de génération du groupe symplectique.

I Préliminaires

Q 1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \quad \mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{Y} = \mathrm{X}^\top \mathrm{B} \mathrm{Y}$$

Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Q 2. Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{M}^\top \mathrm{M}$ sont toutes strictement positives. En déduire qu'il existe une matrice S symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{M}^\top \mathrm{M}$.

II Objets symplectiques

II.A - Structure d'espace vectoriel symplectique réel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n.
On appelle *forme symplectique sur* E toute application ω de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

— bilinéarité : $\forall (x, y, z) \in \mathrm{E}^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \omega(x + \lambda y, z) = \omega(x, z) + \lambda \omega(y, z)$ et $\omega(x, y + \lambda z) = \omega(x, y) + \lambda \omega(x, z)$;

— antisymétrie : $\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \omega(x, y) = -\omega(y, x)$;

— non dégénérescence : $\{x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{E},\ \omega(x, y) = 0\} = \{0_\mathrm{E}\}$.

Un *espace vectoriel symplectique réel* (E, ω) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E muni d'une forme symplectique ω sur E.

Q 3. Montrer que, si ω est une forme symplectique sur E, alors $\forall x \in \mathrm{E}$, $\omega(x, x) = 0$.

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace symplectique (E, ω), on appelle *ω-orthogonal* de F et on note F^ω l'ensemble

$$\mathrm{F}^\omega = \{x \in \mathrm{E} \mid \forall y \in \mathrm{F},\ \omega(x, y) = 0\}$$

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace symplectique (E, ω).

Q 4. Justifier que F^ω est un sous-espace vectoriel de E.

Q 5. Le sous-espace F^ω est-il nécessairement en somme directe avec F ?

Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on note $\omega(x, \cdot)$ l'application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, $y \mapsto \omega(x, y)$ et on considère

$$d_\omega : \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \to & \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}) \\ x & \mapsto & \omega(x, \cdot) \end{array} \right.$$

Q 6. Montrer que d_ω est un isomorphisme.

Pour $\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$, on note $\ell|_\mathrm{F}$ la restriction de ℓ à F.

Q 7. Montrer que l'application de restriction $r_\mathrm{F} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R}) \\ \ell & \mapsto & \ell|_\mathrm{F} \end{array} \right.$ est surjective.

Q 8. Préciser le noyau de $r_\mathrm{F} \circ d_\omega$. En déduire que $\dim \mathrm{F}^\omega = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$.

Q 9. Montrer que la restriction ω_F de ω à F^2 définit une forme symplectique sur F si et seulement si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega = \mathrm{E}$.

II.B - Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$

On suppose qu'il existe une forme symplectique ω sur $\mathbb{R}^n$ et on note $\Omega \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$\Omega = (\omega(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 10. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \omega(x, y) = \mathrm{X}^\top \Omega \mathrm{Y}$$

où X et Y désignent les colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 11. En déduire que Ω est antisymétrique et inversible.

Q 12. Conclure que l'entier n est pair.

Jusqu'à la fin du problème, on suppose que n est pair et on note $m \in \mathbb{N}^*$ l'entier naturel tel que $n = 2m$.
On note $\mathrm{J} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \, (= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$ la matrice définie par blocs par

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix}$$

et on note j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à J.

Q 13. Montrer que l'application $b_s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \langle x, j(y) \rangle \end{array} \right.$ est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Il existe donc des formes symplectiques en dimension paire, et seulement en dimension paire.
La forme symplectique b_s est appelée la *forme symplectique standard sur* $\mathbb{R}^n$.

II.C - Endomorphismes et matrices symplectiques réels

On appelle *endomorphisme symplectique* d'un espace vectoriel symplectique réel (E, ω) tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, \quad \omega(u(x), u(y)) = \omega(x, y).$$

On note $\mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$ l'ensemble des endomorphismes symplectiques de l'espace symplectique (E, ω).
Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$ un endomorphisme symplectique de E.
Soient λ, μ des valeurs propres réelles de u, et soient $\mathrm{E}_\lambda(u), \mathrm{E}_\mu(u)$ les sous-espaces propres associés.

Q 14. Montrer que, si $\lambda\mu \neq 1$, alors les sous-espaces $\mathrm{E}_\lambda(u)$ et $\mathrm{E}_\mu(u)$ sont ω-orthogonaux, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathrm{E}_\lambda(u), \quad \forall y \in \mathrm{E}_\mu(u), \quad \omega(x, y) = 0.$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note M la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Q 15. Montrer que u est un endomorphisme symplectique de l'espace symplectique standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$ si et seulement si $\mathrm{M}^\top \mathrm{J} \mathrm{M} = \mathrm{J}$.

Une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symplectique* si $\mathrm{M}^\top \mathrm{J} \mathrm{M} = \mathrm{J}$.
On note $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques réelles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{M}^\top \mathrm{J} \mathrm{M} = \mathrm{J}\right\}$$

Q 16. Montrer que $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, stable par transposition et contenant la matrice J.

Ce groupe est appelé *groupe symplectique réel d'ordre* $n = 2$ m.
Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et soit $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ (décomposition par blocs).

Q 17. Montrer que $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\mathrm{A}^\top \mathrm{C} \text{ et } \mathrm{B}^\top \mathrm{D} \text{ sont symétriques et } \mathrm{A}^\top \mathrm{D} - \mathrm{C}^\top \mathrm{B} = \mathrm{I}_m.$$

III Déterminant d'une matrice symplectique réelle

L'objectif de cette partie est de montrer l'inclusion $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ par deux méthodes différentes qui reposent chacune sur une propriété structurelle du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ qu'on examine au préalable.

III.A - Le cas de la dimension 2

Q 18. Montrer que $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

III.B - Commutant de J

On note $\mathcal{C}_\mathrm{J} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{JM} = \mathrm{MJ}\}$ le commutant de la matrice J, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec J.

Q 19. Montrer que, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,(= \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R}))$,

$$\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{J} \Longleftrightarrow \exists (\mathrm{U}, \mathrm{V}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \quad \mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix}$$

Q 20. En déduire que, pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{C}_\mathrm{J}$, $\det(\mathrm{M}) \geqslant 0$.

On pourra considérer le produit de matrices par blocs $\begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ \mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U} & -\mathrm{V} \\ \mathrm{V} & \mathrm{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ -\mathrm{iI}_m & \mathrm{I}_m \end{pmatrix}$.

III.C - Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle

On note $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques et orthogonales réelles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie d'espace vectoriel normé de dimension finie.

Q 21. Montrer que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe symplectique $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Q 22. Montrer que $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_\mathrm{J}$.

Q 23. En déduire que, pour toute matrice M de $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$, $\det(\mathrm{M}) = 1$.

Jusqu'à la fin de la sous-partie III.C, on considère une matrice $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
Soit $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives telle que $\mathrm{S}^2 = \mathrm{M}^\top \mathrm{M}$.

Q 24. Montrer que S est symplectique.

On pourra considérer une base de vecteurs propres de l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à S, et montrer que s est un endomorphisme symplectique de l'espace standard $(\mathbb{R}^n, b_s)$.

Q 25. Justifier que S est inversible puis montrer que la matrice O définie par $\mathrm{O} = \mathrm{MS}^{-1}$ appartient au groupe $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$.

Q 26. Conclure que le déterminant de la matrice M est égal à 1.

III.D - Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques

Soit (E, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension $n = 2m$.
On appelle *transvection* de E tout endomorphisme τ de E tel qu'il existe $\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$, $\ell \neq 0$, et $a \in \ker(\ell)$, $a \neq 0$, vérifiant

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \tau(x) = x + \ell(x)a.$$

On dit que τ est une transvection d'hyperplan $\ker \ell$.

III.D.1) Caractérisation des transvections

Soit $\ell \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R})$, $\ell \neq 0$, et $\mathrm{H} = \ker \ell$.

Q 27. Soit $\tau \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ telle que $\tau \neq \mathrm{Id}$ et $\tau_{|\mathrm{H}} = \mathrm{Id}_\mathrm{H}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(a) $\det \tau = 1$.

(b) τ n'est pas diagonalisable.

(c) $\mathrm{Im}(\tau - \mathrm{Id}) \subset \mathrm{H}$.

(d) Il existe $a \in \ker(\ell)$, $a \neq 0$, vérifiant

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \tau(x) = x + \ell(x)a$$

(τ est une transvection d'hyperplan H.)

(e) Il existe une base de E telle que la matrice de τ dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q 28. En déduire que si $\tau \in \mathrm{Sp}_n(\mathrm{E})$ est telle que $\tau \neq \mathrm{Id}$ et $\tau_{|\mathrm{H}} = \mathrm{Id}_\mathrm{H}$, alors τ est une transvection.

III.D.2) Transvection symplectique

Q 29. Soit $a \in \mathrm{E}$ un vecteur non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Montrer que l'application τ_a^λ définie par

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \tau_a^\lambda(x) = x + \lambda\omega(a, x)a$$

est une transvection de E et qu'il s'agit d'un endomorphisme symplectique de ce même espace. Les applications τ_a^λ pour $a \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ sont appelées *transvections symplectiques de* E.

Q 30. Soit $a \in \mathrm{E}$ un vecteur non nul et soient λ et μ des réels. Montrer que $\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}$.

Q 31. Soient $a \in \mathrm{E}$ un vecteur non nul et λ un réel. Montrer que $\det\left(\tau_a^\lambda\right) > 0$.

Q 32. La réciproque $\left(\tau_a^\lambda\right)^{-1}$ est-elle encore une transvection symplectique ?

On se propose de montrer le théorème suivant :

Tout endomorphisme symplectique de E *peut s'écrire comme la composée d'au plus* $2n = 4m$ *transvections symplectiques de* E *: si* $u \in \mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$, *il existe un entier* $p \leqslant 4m$ *et* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ *des transvections symplectiques de* E *telles que* $u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$.

III.D.3) Un lemme

On commence par montrer le lemme suivant :
Pour tous vecteurs non nuls x et y de E, il existe une composée γ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\gamma(x) = y$.

On fixe x et y, non nuls, dans E.

Q 33. Supposons que $\omega(x, y) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{y-x}^\lambda(x) = y$.

Q 34. Supposons que $\omega(x, y) = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur $z \in \mathrm{E}$ tel que $\omega(x, z) \neq 0$ et $\omega(y, z) \neq 0$.

Q 35. Montrer le lemme cité ci-dessus.

III.D.4) Le théorème

Soit $u \in \mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$ un endomorphisme symplectique de E.
Soit $e_1 \in \mathrm{E}$ un vecteur non nul.

Q 36. Justifier l'existence de $f_1 \in \mathrm{E}$, non colinéaire à e_1, tel que $\omega(e_1, f_1) = 1$.

On pose $\mathrm{P} = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ le plan vectoriel engendré par les vecteurs e_1 et f_1. On va montrer l'existence d'une composée δ d'au plus quatre transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases} \delta(u(e_1)) = e_1 \\ \delta(u(f_1)) = f_1 \end{cases} \tag{III.1}$$

Q 37. Pourquoi existe-t-il une composée δ_1 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que
$\delta_1(u(e_1)) = e_1$?

Q 38. Notons $\tilde{f}_1$ le vecteur $\delta_1(u(f_1))$. Montrer qu'il existe une composée δ_2 d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que

$$\begin{cases} \delta_2(e_1) = e_1 \\ \delta_2\left(\tilde{f}_1\right) = f_1 \end{cases}$$

On pourra adapter la démonstration du lemme précédent.

La composée $\delta = \delta_2 \circ \delta_1$ d'au plus quatre transvections symplectiques vérifie bien les conditions (III.1) souhaitées.
On pose $v = \delta \circ u$.

Q 39. Montrer que P est stable par v et déterminer v_{P}, endomorphisme induit par v sur P.

Q 40. Montrer que P^{ω} est stable par v.

Q 41. Montrer que la restriction $\omega_{\mathrm{P}^{\omega}}$ de ω à $\mathrm{P}^{\omega} \times \mathrm{P}^{\omega}$ munit P^{ω} d'une structure d'espace symplectique et que l'endomorphisme $v_{\mathrm{P}^{\omega}}$ induit par v sur P^{ω} est un endomorphisme symplectique.

Q 42. À l'aide de ce qui précède, montrer le théorème annoncé.