Chapitre I

Exemples de développement d'une fonction en série entière

Exercice (1). Développement en série entière des fractions rationnelles

Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle, où le dénominateur Q vérifie la condition $Q(0) \neq 0$ et se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$Q(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - z_i)^{\alpha_i},$$

les nombres $z_1, \ldots, z_r$ étant les racines complexes deux à deux distinctes de Q, de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$.

La décomposition en éléments simples de F est alors de la forme

$$F(X) = E(X) + \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \frac{\lambda_{j,k}}{(X - z_k)^j} \Big).$$

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le développement en série entière de la fonction $f : \ x \mapsto \dfrac{1}{(x - z)^p}$ au point 0.
2. Déterminer alors le développement en série entière de la fraction rationnelle $F = P/Q$.

3. **Application.** Déterminer le développement en série de Fourier des fonctions

$$g:\ \theta \mapsto \frac{1}{2-e^{i\theta}} \quad \text{et} \quad h:\ \theta \mapsto \frac{1}{2-\sin(\theta)},$$

et calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-e^{i\theta}} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2-\cos(\theta)}.$$

▶ **Corrigé.**–

1. Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, et $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < |z|$,

$$\frac{1}{x-z} = \frac{-1}{z} \times \frac{1}{1-\frac{x}{z}} = \frac{-1}{z} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{-1}{z^{k+1}} \times x^k.$$

En dérivant $p-1$ fois la fonction $f:\ x \mapsto 1/(x-z)$, on obtient pour tout x tel que $|x| < |z|$,

$$\begin{aligned} f^{(p-1)}(x) &= \frac{(-1)^{p-1} \times (p-1)!}{(x-z)^p} \\ &= \sum_{k=p-1}^{+\infty} \frac{-1}{z^{k+1}} \times k(k-1) \times \cdots \times (k-p+2) \times x^{k-p+1}, \end{aligned}$$

et donc toujours si $|x| < |z|$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-z)^p} &= (-1)^p \times \sum_{k=p-1}^{+\infty} \frac{k!}{(p-1)! \times (k-p+1)!} \times \frac{x^{k-p+1}}{z^{k+1}} \\ &= (-1)^p \times \sum_{k=p-1}^{+\infty} \binom{k}{p-1} \frac{x^{k-p+1}}{z^{k+1}} \\ &= (-1)^p \times \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+p-1}{p-1} \frac{x^k}{z^{k+p}}. \end{aligned}$$

2. On note $R = \min_{1 \leqslant k \leqslant r} \left(|z_k|\right)$; pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < R$, on a alors, d'après 1,

$$\begin{aligned} F(x) &= E(x) + \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} \lambda_{j,k} \times (-1)^j \times \sum_{i=0}^{+\infty} \binom{i+j-1}{j-1} x^i \right) \\ &= E(x) + \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{\alpha_k} (-1)^j \times \lambda_{j,k} \times \binom{i+j-1}{j-1} \right) \right) x^i. \end{aligned}$$

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 2$,

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \times x^n,$$

d'où $\displaystyle \frac{1}{2-e^{\mathrm{i}\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \times e^{\mathrm{i}n\theta}.$

Or, la série trigonométrique $\sum e^{\mathrm{i}n\theta}/2^{n+1}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, et elle est dès lors la série de Fourier de sa somme g. Par conséquent,

$$\frac{1}{\pi} \times \int_0^{2\pi} g(t)\mathrm{d}t = a_0(g) = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \iff \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2-e^{\mathrm{i}\theta}} = \pi.$$

b) Pour tout réel θ,

$$\frac{1}{2-\cos(\theta)} = \frac{1}{2-\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}+e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}} = \frac{-2 \times e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{2\mathrm{i}\theta} - 4 \times e^{\mathrm{i}\theta} + 1}.$$

Or, $x^2 - 4x + 1 = (x-2)^2 - 3 = (x-2-\sqrt{3}) \times (x-2+\sqrt{3})$,

et $\displaystyle \frac{-2x}{x^2-4x+1} = \frac{A}{x-2-\sqrt{3}} + \frac{B}{x-2+\sqrt{3}}$, avec $\begin{cases} A = (2+\sqrt{3})/3 \\ B = (2-\sqrt{3})/\sqrt{3}, \end{cases}$

et donc $\displaystyle \frac{-2x}{x^2-4x+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2-\sqrt{3}}{x-2+\sqrt{3}} - \frac{2+\sqrt{3}}{x-2-\sqrt{3}} \right).$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2-\cos(\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-e^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{2-\sqrt{3}}{e^{\mathrm{i}\theta}-2+\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1-(2-\sqrt{3})e^{\mathrm{i}\theta}} - (2-\sqrt{3})e^{-\mathrm{i}\theta} \times \frac{1}{1-(2-\sqrt{3})e^{-\mathrm{i}\theta}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (2-\sqrt{3})^n e^{\mathrm{i}n\theta} - (2-\sqrt{3})e^{-\mathrm{i}\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (2-\sqrt{3})^n e^{-\mathrm{i}n\theta} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (2-\sqrt{3})^n \times (e^{\mathrm{i}n\theta} + e^{-\mathrm{i}n\theta}) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2-\sqrt{3})^n \cos(n\theta) \right).
\end{aligned}$$

Comme la série trigonométrique $1/\sqrt{3} + 2/\sqrt{3} \sum (2-\sqrt{3})^n \cos(n\theta)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, elle est alors la série de Fourier de sa somme h. Par conséquent,

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{a_0(h)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2-\cos(\theta)} \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{2-\cos(\theta)}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Exercice (2). Théorème de Bernstein

Soit $r>0$, et soit $f:\,]-r\,;r[\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On suppose que pour tout $k\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\,]-r\,;r[$, on a $f^{(2k)}(x)\geqslant 0$. On définit la fonction $g:\,]-r\,;r[\,\to\mathbb{R},\ x\ \mapsto f(x)+f(-x)$, et l'on note, pour $x\in]-r\,;r[$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$R_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t$$

$$\text{et}\ \ r_n(x)\ =\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\times f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t.$$

Soit $a\in]0\,;r[$, et soit $x\in]-a\,;a[$.

1. a) Montrer que $R_n(x)=g(x)-\sum_{k=0}^n\big(g^{(2k)}(0)/(2k)!\big)\times x^{2k}$ et que $0\leqslant R_n(x)\leqslant R_n(|x|)\leqslant R_n(a)\leqslant g(a)$.

   b) Montrer que $\forall t\in\big[0\,;|x|\big],\ 0\leqslant\dfrac{|x|-t}{a-t}\leqslant\dfrac{|x|}{a}$, et en déduire que

$$0\leqslant R_n(|x|)\leqslant\Big(\frac{|x|}{a}\Big)^{2n+1}\times R_n(a),$$

$$\text{puis que}\qquad g(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!}\times x^{2k}.$$

2. a) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ r_{2n+1}(x)\geqslant 0\quad\text{et}\quad R_n(x)=r_{2n+1}(x)+r_{2n+1}(-x),$$

   et dès lors que $\sum_{k=0}^{2n+1}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)$.

   b) En déduire que f est développable en série entière sur $]-r\,;r[$.

3. **Application.–** Démontrer que la fonction $f:\ x\mapsto\tan(x)$ définie sur $]-\pi/2\,;\pi/2[$ est développable en série entière en 0.

▶ **Corrigé.–**

1. a) La fonction g est paire, donc pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, $g^{(2k)}$ est paire et $g^{(2k+1)}$ est impaire, donc $g^{(2k+1)}(0)=0$. La formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale donne alors

$$R_n(x)=g(x)-\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\times x^k=g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!}\times x^{2k}$$

$$=g(-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!}\times(-x)^{2k}=R_n(-x).$$

De plus, $\forall t \in]-r\,;r[$, $g^{(2k)}(t) = f^{(2k)}(t) + f^{(2k)}(-t) \geqslant 0$, d'où

$$\begin{aligned} 0 \leqslant R_n(|x|) &= \int_0^{|x|} \frac{\big(|x|-t\big)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{|x|} \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{a} \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t = R_n(a), \end{aligned}$$

et $R_n(a) = g(a) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} \times a^{2k} \leqslant g(a)$.

b) Soit la fonction $\begin{array}{rccc} h : & [0\,;|x|] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \dfrac{|x|-t}{a-t}. \end{array}$

On a pour tout $t \in [0\,;|x|]$, $h'(t) = (|x|-a)/(a-t)^2 \leqslant 0$, et h est donc décroissante sur l'intervalle $[0\,;|x|]$, et l'on a ainsi

$$\forall t \in]0\,;|x|[, \quad 0 = h(|x|) \leqslant h(t) = \frac{|x|-t}{a-t} \leqslant h(0) = \frac{|x|}{a}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant R_n(|x|) &= \int_0^{|x|} \frac{\big(|x|-t\big)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{|x|} \Big(\frac{|x|-t}{a-t}\Big)^{2n+1} \times \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \Big(\frac{|x|}{a}\Big)^{2n+1} \times \int_0^{|x|} \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &\leqslant \Big(\frac{|x|}{a}\Big)^{2n+1} \times \int_0^{a} \frac{(a-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \\ &= \Big(\frac{|x|}{a}\Big)^{2n+1} \times R_n(a) \leqslant \Big(\frac{|x|}{a}\Big)^{2n+1} \times g(a). \end{aligned}$$

Ainsi, par encadrement, $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} \times x^{2k}$.

2. a) Si $x > 0$, alors pour tout $t \in [0\,;x]$, $x - t \geqslant 0$ et $f^{(2n+2)}(t) \geqslant 0$, et donc $r_{2n+1}(x) = \displaystyle\int_0^{x} \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times f^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Si $x < 0$, alors avec le changement de variable $u = -t$,

$$r_{2n+1}(x) = \int_0^{|x|} \frac{\big(|x|-u\big)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times f^{(2n+2)}(-u)\mathrm{d}u \geqslant 0,$$

et

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times g^{(2n+2)}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \big(f^{(2n+2)}(t)+f^{(2n+2)}(-t)\big)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times f^{(2n+1)}(t)\mathrm{d}t + \int_0^{-x} \frac{(-x-u)^{2n+1}}{(2n+1)!} \times f^{(2n+2)}(u)\mathrm{d}u \\
&= r_{2n+1}(x) + r_{2n+1}(-x).
\end{aligned}$$

On en déduit : $0 \leqslant r_{2n+1}(x) \leqslant R_n(x)$, et donc $r_{2n+1}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, soit

$$f(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \times x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \times x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

b) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \times x^k$. D'après 2, on a $S_{2n-1}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$; par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) &= \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \times x^{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} \times x^{2n} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(2k)}(0)}{(2k)!} \times x^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(2k)}}{(2k)!} \times x^{2k} \Big) \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\big(g(x) - g(x)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$S_{2n}(x) = S_{2n-1}(x) + \big(S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) + 0 = f(x).$$

Par conséquent, $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n+1}(x)$, et donc

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Ce résultat est vrai pour tout $a \in]0\,;r[$, et tout $x \in]-a\,;a[$, et donc pour tout $x \in]-r\,;r[$.

3. La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\}$.
Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathcal{D},\ \tan^{(n)}(x) = P_n\big(\tan(x)\big)$, où $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes réels définie par $P_0(X) = X$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(X) = (X^2+1)P_n'(X)$.
Remarque.– La récurrence montrera aussi que les polynômes (P_n) sont tous à coefficients positifs, que $\deg(P_n) = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que les polynômes (P_{2n+1}) sont pairs et que les polynômes (P_{2n}) sont impairs.

Initialisation.– Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a $\tan^{(0)}(x) = \tan(x) = P_0\big(\tan(x)\big)$ avec $P_0(X) = X$, qui est bien impair et dont le seul coefficient (non nul) est positif, de degré $1 = 0 + 1$: la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité.– Supposons la propriété vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\tan^{(n)}(x) = P_n\big(\tan(x)\big)$, et donc

$$\tan^{(n+1)}(x) = \big(1 + \tan^2(x)\big)P_n'\big(\tan(x)\big) = P_{n+1}\big(\tan(x)\big).$$

De plus, P_{n+1} vérifie $\deg(P_{n+1}) = 2 + \deg(P_n') = 2 + n + 1 - 1 = n + 2$, et $P_{n+1}(X) = (1 + X^2)P_n'(X)$ est à coefficients positifs (comme produit de polynômes qui ont cette propriété), de même parité que P_n', donc contraire à celle de P_n : le polynôme P_{n+1} est pair (resp. impair) si, et seulement si, $n + 2$ est un entier pair (resp. impair).

La propriété est donc bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a alors, pour tout $x \in]-\pi/2\,;\pi/2[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\tan^{(2n+1)}(x) = P_{2n+1}\big(\tan(x)\big) = P_{2n+1}(|\tan(x)|) \geqslant 0.$$

Le théorème de Bernstein assure alors que la fonction tangente est développable en série entière sur $\big]-\pi/2\,;\pi/2\big[$.

Remarque.– Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\operatorname{cotan}(x) - 2\operatorname{cotan}(2x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{2\cos(2x)}{2\sin(x)\cos(x)}\\ &= \frac{\cos^2(x) - \big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)\cos(x)}\\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x).\end{aligned}$$

Par ailleurs, on verra dans l'exercice suivant que pour tout $x \in]-\pi\,;\pi[$, on a $x\operatorname{cotan}(x) = 1 - 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k}$, d'où il résulte que, pour tout x dans $]-\pi/2\,;\pi/2[$,

$$\begin{aligned}x\tan(x) &= x\operatorname{cotan}(x) - 2x\operatorname{cotan}(2x)\\ &= 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k} - \Big(1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} (2x)^{2k}\Big)\\ &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} (2^{2k} - 1)x^{2k},\end{aligned}$$

soit $\quad \tan(x) = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} (2^{2k} - 1)x^{2k-1}.$

Exercice (3). Développement en série entière et nombres de Bernoulli

1. Soit $x \in]0\,;\pi[$, et soit $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire, définie sur $[0\,;\pi]$ par : $\forall t \in [0\,;\pi],\ f_x(t) = \cos\left(\frac{x}{\pi} t\right)$.
   a) Déterminer la série de Fourier de f_x.
   b) Montrer alors que
   $$\forall x \in]-\pi\,;\pi[, \quad x \times \operatorname{cotan}(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2 - n^2\pi^2}.$$
   c) En déduire que
   $$\forall x \in]-\pi\,;\pi[, \quad x \times \operatorname{cotan}(x) = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} x^{2k}.$$
   (Ici, ζ est la fonction zêta de Riemann.)
   d) En déduire que, pour tout $x \in]-2\pi\,;2\pi[\,\setminus\{0\}$,
   $$\frac{\mathrm{i}x}{e^{\mathrm{i}x} - 1} = 1 - \mathrm{i}\,\frac{x}{2} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k} 2^{2k}} x^{2k}.$$
2. Soit la fonction
   $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
   $$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$g^{(2n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1} \times (2n)!}{\pi^{2n} \times 2^{2n-1}} \times \zeta(2n).$$
   b) En déduire que, pour tout $x \in]-2\pi\,;2\pi[$,
   $$g(x) = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \times \zeta(2k)}{2^{2k-1} \times \pi^{2k}} \times x^{2k}.$$
   c) On définit les **nombres de Bernoulli** par $b_0 = 1,\ b_1 = -1/2$
   $$\text{et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} \times (2n)! \times \zeta(2n)}{2^{2n-1} \times \pi^{2n}}\ ;\ b_{2n+1} = 0.$$
   Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k! \times (n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$
   d) Calculer b_2, b_4 et b_6, puis $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

▶ **Corrigé.–**

1. a) La fonction f_x est paire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$, et

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_x(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(\cos\Big(\big(\frac{x}{\pi} - n\big)t\Big) + \cos\Big(\big(\frac{x}{\pi} + n\big)t\Big)\Big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\big((x/\pi - n)t\big)}{x/\pi - n} + \frac{\sin\big((x/\pi + n)t\big)}{x/\pi + n}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\sin(x)\times\Big(\frac{1}{x/\pi - n} + \frac{1}{x/\pi + n}\Big) \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\sin(x)\times\frac{2\times x/\pi}{x^2/\pi^2 - n^2} = \frac{2\times(-1)^n\times x\sin(x)}{x^2 - n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Enfin, $a_0(f_x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{x}{\pi}t\right)\mathrm{d}t = 2\times\left[\frac{\sin\big((x/\pi)t\big)}{x}\right]_0^{\pi} = \frac{2\sin(x)}{x}.$

La série de Fourier de f_x est donc

$$\frac{\sin(x)}{x} + 2x\sin(x)\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x^2 - n^2\pi^2}\times\cos(nt).$$

b) La fonction f_x est 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet, on a, pour tout réel t,

$$f_x(t) = \frac{\sin(x)}{x} + 2\sin(x)\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\times x}{x^2 - n^2\pi^2}\times\cos(nt).$$

En particulier, pour $t = \pi$,

$$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{x} + 2\sin(x)\times\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{x^2 - n^2\pi^2}\Big),$$

d'où

$$x\times\operatorname{cotan}(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

c) En repartant de ce qui précède, on a, pour tout $x \in]-\pi\,;\pi[$,

$$\begin{aligned} x\times\operatorname{cotan}(x) &= 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{n^2\pi^2}\times\frac{1}{1 - x^2/(n^2\pi^2)} \\ &= 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{x^2}{n^2\pi^2}\Big)^k\Big), \qquad \text{où } x^2/(n^2\pi^2) \in]0\,;1[, \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, après interversion des deux sommes (car $x^{2k}\geqslant 0$),

$$x\times\text{cotan}(x)=1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}\Big)\times\frac{x^{2k}}{\pi^{2k}}$$
$$=1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}x^{2k}.$$

d) On en déduit alors que, pour tout $x\in\,]-2\pi\,;2\pi[\,\setminus\{0\}$,

$$\frac{\mathrm{i}x}{e^{\mathrm{i}x}-1}+\mathrm{i}\times\frac{x}{2}=\frac{\mathrm{i}x+\mathrm{i}xe^{\mathrm{i}x}}{2(e^{\mathrm{i}x}-1)}=\mathrm{i}\times\frac{x}{2}\times\frac{e^{\mathrm{i}x}+1}{e^{\mathrm{i}x}-1}$$
$$=\mathrm{i}\times\frac{x}{2}\times\frac{e^{\mathrm{i}x/2}+e^{-\mathrm{i}x/2}}{e^{\mathrm{i}x/2}-e^{-\mathrm{i}x/2}}=\mathrm{i}\times\frac{x}{2}\times\frac{2\cos(x/2)}{2\mathrm{i}\sin(x/2)}$$
$$=\frac{x}{2}\times\text{cotan}\big(\frac{x}{2}\big)$$
$$=1-2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}\times\big(\frac{x}{2}\big)^{2k}=1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k}\times\pi^{2k}}\times x^{2k}.$$

2. a) On remarque que $g(x)=h(-\mathrm{i}x)$, où

$$h\,:\;\begin{array}{ccl}]-2\pi\,;2\pi[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}\dfrac{\mathrm{i}x}{e^{\mathrm{i}x}-1} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}\end{array}$$

Or, d'après 1.d), $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ h^{(2k)}(0)=-2\times\dfrac{\zeta(2k)}{2^{2k}\times\pi^{2k}}\times(2k)!$, d'où

$$g^{(2k)}(0)=(-\mathrm{i})^{2k}h^{(2k)}(0)=(-1)^kh^{(2k)}(0)=\frac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\times\pi^{2k}}\times(2k)!.$$

b) D'après la formule de Taylor avec reste intégrale, $\forall x\in\,]-2\pi\,;2\pi[$,

$$\Big|g(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\times x^k\Big|=\Big|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\times g^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\Big|$$
$$=\Big|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\times(-\mathrm{i})^{n+1}\times h^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\Big|$$
$$=\Big|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}\times h^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\Big|$$
$$=\Big|h(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{h^{(k)}(0)}{k!}\times x^k\Big|$$
$$\leqslant\sum_{k=\lfloor n/2\rfloor}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}\times\pi^{2k}}\times x^{2k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,\ \text{d'après 1.d}).$$

Ainsi, pour tout $x \in]-2\pi\,;2\pi[$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \times x^k = 1 - \frac{x}{2} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} \times \zeta(2k)}{2^{2k} \times \pi^{2k}} \times x^{2k}.$$

c) Pour tout $x \in]0\,;2\pi[$, on a $\dfrac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{b_k}{k!} \times x^k$. Dès lors,

$$1 = \frac{x}{e^x - 1} \times \frac{e^x - 1}{x} = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!} \times x^k\Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}\Big)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k! \times (n+1-k)!}\Big) \times x^n, \quad \text{par produit de Cauchy.}$$

D'où, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k! \times (n+1-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$

d) Pour tout $x \in]-2\pi\,;2\pi[$, on a

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{2^{2n} \times \pi^{2n}} \cdot x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} \times x^n,$$

d'où $b_0 = 1$ et $b_1 = -1/2$. Ensuite,

$$0 = \sum_{k=0}^{2} \frac{b_k}{k! \times (3-k)!} = \frac{b_0}{6} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2}, \text{ d'où}$$
$$b_2 = 2\Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\Big) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$
$$0 = \sum_{k=0}^{4} \frac{b_k}{k!(5-k)!} = \frac{b_0}{120} + \frac{b_1}{24} + \frac{b_2}{12} + \frac{b_4}{24}, \text{ d'où}$$
$$b_4 = 24\Big(\frac{-1}{120} + \frac{1}{48} - \frac{1}{72}\Big) = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}.$$
$$0 = \sum_{k=0}^{6} \frac{b_k}{k!(7-k)!} = \frac{b_0}{5040} + \frac{b_1}{720} + \frac{b_2}{240} + \frac{b_4}{144} + \frac{b_6}{720}, \text{ d'où}$$
$$b_6 = 720\Big(\frac{-1}{5040} + \frac{1}{1440} - \frac{1}{1440} + \frac{1}{4320}\Big) = -\frac{1}{7} + \frac{1}{6} = \frac{1}{42}.$$

Ainsi,

$$\zeta(2) = \frac{2 \times \pi^2}{2!} \times b_2 = \frac{\pi^2}{6}\ ; \quad \zeta(4) = \frac{-8\pi^4}{24} \times b_4 = \frac{\pi^4}{90}$$
$$\text{et} \quad \zeta(6) = \frac{32\pi^6}{720} \times \frac{1}{42} = \frac{\pi^6}{45 \times 21} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice (4). Développement en série entière d'un inverse

Soit $\sum a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, et soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} S: & D(0,R) \to & \mathbb{C} \\ & z \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \end{array}$$

où $D(0,R)=\{z\in\mathbb{C}\,;|z|<R\}$. Pour $p\in\mathbb{N}$, on note

$$a_{p,n} = \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} a_{k_1}\cdots a_{k_n}.$$

1. Montrer que si $z\in D(0,R)$, alors la série $\sum_p a_{n,p}z^p$ converge absolument, et que
$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n}z^p = \big(S(z)\big)^n.$$
2. On suppose que $a_0=0$.
   a) Montrer qu'il existe $r>0$ tel que $\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|r^n=1$, et en déduire que si $|z|\leqslant r$, alors la suite double $(a_{p,n}z^p)_{p,n\in\mathbb{N}}$ est sommable.
   b) En déduire que la fonction $T: D(0,R)\to\mathbb{C},\ z\mapsto \dfrac{1}{1-S(z)}$ est développable en série entière.
3. En déduire que si $f: D(0,R)\to\mathbb{C}$ est développable en série entière et que $f(0)\neq 0$, alors $1/f$ est développable en série entière.
4. **Application.**– Montrer que les fonctions

$$\begin{array}{rcl} u: & D(0,R)\to & \mathbb{C} \\ & z \mapsto & \begin{cases} \dfrac{z}{e^z-1} & \text{si } z\neq 0 \\ 1 & \text{si } z=0 \end{cases} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} v: & D\big(0,\frac{\pi}{2}\big)\to & \mathbb{C} \\ & z\mapsto & \dfrac{1}{\cos(z)} \end{array}$$

sont développables en séries entières.

▶ **Corrigé.**–

1. Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $z\in D(0,R)$,
$$\big(S(z)\big)^n = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}a_k z^k\Big)^n = \sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=p} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_n}\Big)z^p.$$

2. a) Il est clair que le rayon de convergence de la série entière $\sum |a_k|z^k$

est R, et que la fonction $S_1 : D(0,R) \to \mathbb{C},\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| z^n$ est donc continue, de sorte que : $S_1(z) \xrightarrow[z\to 0]{} S_1(0) = a_0 = 0$. Il existe dès lors $r > 0$ tel que $S_1(r) < 1$, autrement dit $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < 1$.
Ainsi, pour tout $z \in D(0,R)$,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{+\infty} |a_p z^p| &= \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(\Big| \sum_{k_1+\cdots+k_n=p} a_{k_1}\cdots a_{k_n}\Big|\Big) \times |z|^p \\ &\leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k_1+\cdots+k_n=p} |a_{k_1}|\cdots|a_{k_n}|\Big) \times |z|^p = \big(S_1(|z|)\big)^n \\ &\leqslant \big(S_1(r)\big)^n.\end{aligned}$$

Et, comme $0 \leqslant S_1(r) < 1$, alors la série $\sum_n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |a_{p,n} z^p|\right)$ converge, et par conséquent la suite double $(a_{p,n} z^p)_{p,n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

b) Fixons z dans $D(0,r)$; la suite double $(a_{p,n} z^p)$ étant sommable, la série $\sum_p \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n}\right) z^p$ converge, et

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p,n}\Big) z^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,n} z^p\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \big(S(z)\big)^n = \frac{1}{1-S(z)}.$$

3. On sait qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telle que, pour tout $z \in D(0,R)$, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times z^n$ avec $a_0 = f(0) \neq 0$.
On peut alors écrire, toujours pour $z \in D(0,R)$,

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \times z^n = a_0\big(1 - S(z)\big), \quad \text{avec } S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-a_n}{a_0} \times z^n.$$

Le résultat de 2.b) assure alors que $1/f = (1/a_0) \times \big(1/(1-S)\big)$ est développable en série entière en 0.

4. Soit la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \begin{cases} (e^z - 1)/z & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$ On sait que pour tout $z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{(n+1)!}$, et $f(0) = 1 \neq 0$.
D'après 3, on en déduit que $u = 1/f$ est développable en série entière sur le disque ouvert $D(0, 2\pi)$.

De même, la fonction $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \cos(z)$ vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

avec $g(0) = 1 \neq 0$, et la fonction $v = 1/g$ est donc, de nouveau d'après 3, développable en série entière sur $D(0, \pi/2)$.

Exercice (5). Condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction réelle soit développable en série entière

1. **Condition suffisante.–**
   Soit $a>0$, et soit $f :]-a\,;a[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe deux réels C et $A>0$ tels que
   $$\forall x \in]-a\,;a[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\,; \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant C\times A^n \times n!\,.$$
   Montrer que, pour tout $x \in]-a\,;a[$ et tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\times x^k\right| \leqslant C\times A^{n+1}\times |x|^{n+1},$$
   et en déduire que la fonction f est développable en série entière sur $]-r\,;r[$, où $r=\min(a,1/A)$.

2. **Condition nécessaire.–**
   On suppose que f est développable en série entière, c'est-à-dire qu'il existe $R>0$ et une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout $x\in]-R\,;R[$, $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Soit $r \in]0\,;R[$.
   a) Montrer qu'il existe un réel $M>0$ tel que, pour tout entier k, on ait $|a_k| \leqslant M/r^k$.
   b) Soit aussi $\ell \in]0\,;r[$. Montrer que, pour tout $x\in]-\ell\,;\ell[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{M}{r^n}\times \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\times(k-n+1)\times\left(\frac{\ell}{r}\right)^{k-n} = C\times A^n\times n!,$$
   avec $C=M\times r/(r-\ell)$ et $A=1/(r-\ell)$.

▶ **Corrigé.–**

1. **Condition suffisante.–**
   D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x\in]-a\,;a[$ et tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $\theta_{x,n}\in]0\,;1[$ tels que
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\times x^k + \frac{f^{(n+1)}(\theta_{x,n}\times x)}{(n+1)!}\times x^{n+1},$$
   d'où
   $$\begin{aligned}\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\times x^k\right| &= \left|f^{(n+1)}(\theta_{x,n}\times x)\right|\times\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\\ &\leqslant C\times A^{n+1}\times (n+1)!\times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = C\times |A\times x|^{n+1}.\end{aligned}$$

D'où, si $|x| < r = \min(a, 1/A)$,

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \times x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \times x^k.$$

2. **Condition nécessaire.–**
   a) La série $\sum a_n \times r^n$ converge (et admet $f(r)$ pour somme), donc la suite $(a_n \cdot r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, et par conséquent cette suite est bornée : il existe $M > 0$ tel que $|a_k \times r^k| \leqslant M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   b) On sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que, pour tout $x \in]-R\,;R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\times(k-n+1)\times x^{k-n},$$

donc pour tout $x \in]-\ell\,;\ell[$,

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(x)| &\leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\times(k-n+1)\times|a_k|\times\ell^{k-n}\\ &\leqslant \frac{M}{r^n}\times\sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\times(k-n+1)\times\Big(\frac{\ell}{r}\Big)^{k-n},\end{aligned}$$

donc pour tout $x \in]-\ell\,;\ell[$,

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M}{r^n}\times\frac{n!}{(1-\ell/r)^{n+1}} &= \frac{M}{1-\ell/r}\times\frac{1}{(r-\ell)^n}\times n!\\ &= \frac{M\times r}{r-\ell}\times\Big(\frac{1}{r-\ell}\Big)^n\times n!\,.\end{aligned}$$

Exercice (6). Fonction génératrice des polynômes de Legendre

Montrer que si $|t(t-2x)|<1$, alors
$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\times\frac{(2m)!}{2^{2m}\times(m!)^2}\times\big(t(t-2x)\big)^m,$$
et en déduire que
$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)\times t^n,$$
où les
$$L_n(x)=\frac{1}{2^n\times n!}\times\big((x^2-1)^n\big)^{(n)}$$
sont les polynômes de Legendre.

▶ **Corrigé.–**

On sait que, pour $u\in\,]-1\,;1[$,
$$\begin{aligned}(1+u)^{-\frac{1}{2}}&=1+\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\times\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2m-1)}{2^m\times m!}\times u^m\\&=1+\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m\times\frac{(2m)!}{2^{2m}\times(m!)^2}\times u^m,\end{aligned}$$
donc si $-1<t(t-2x)<1$, alors
$$\begin{aligned}(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}&=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\times\frac{(2m)!}{2^{2m}\times(m!)^2}\times(t^2-2tx)^m\\&=\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\times\frac{(2m)!}{2^{2m}\times(m!)^2}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}t^{2k}(-2tx)^{m-k}\right)\\&=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(2m)!}{2^{2m}\times m!}\left(\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k\times2^{m-k}}{k!\times(m-k)!}\times x^{m-k}t^{m+k}\right)\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m+k=n}\frac{(2m)!(-1)^k}{m!\times2^{m+k}\times k!\times(m-k)!}\times x^{m-k}\right)t^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}L_n(x)t^n,\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= \sum_{m+k=n} (-1)^k \times \frac{(2m)!}{2^{m+k} \times m! \times k! \times (m-k)!} \times x^{m-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \times \frac{(2n-2k)!}{2^n \times (n-k)! \times k! \times (n-2k)!} \times x^{n-2k}.
\end{aligned}$$

Or, on a $\quad (x^{2n-2k})^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leqslant k \leqslant n \\ \dfrac{(2n-2k)!}{(n-k)!} \times x^{n-2k} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \end{cases}$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
L_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^n \times (n-k)! \times k!} \times (x^{2n-2k})^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n \times n!} \times \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \times (n-k)!} (-1)^k x^{2n-2k} \Big)^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n \times n!} \times \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (x^2)^{n-k} \Big)^{(n)} \\
&= \frac{1}{2^n \times n!} \times \big((x^2-1) \big)^{(n)}.
\end{aligned}$$

Commentaires sur les exercices de cette leçon

Exercice 1.– Un résultat très utile à connaître absolument, à propos du développement en série entière d'une fraction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle.
Un exemple d'application, avec calculs d'intégrales, termine l'exercice.

Exercice 2.– Un résultat à nouveau très classique, important et à connaître : il s'agit d'établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable réelle soit développable en série entière.
On montre aussi que ce résultat s'applique à la fonction tangente ; le développement en série entière est donné concrètement en tant que remarque à la fin de l'exercice. Le lien avec les nombres de Bernoulli, définis à l'exercice suivant, est laissé au soin du lecteur.

Exercice 3.– Un bel exercice qui sera une bonne proposition pour un développement ; après avoir déterminé le développement en série entière de la fonction paire $x \mapsto x\text{cotan}(x)$ à l'aide de séries de Fourier, développement qui fait intervenir les valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs, on définit les nombres de Bernoulli b_{2n} à partir des $\zeta(2n)$, et l'on établit la relation

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!\times(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Cette relation permet de calculer par récurrence les b_{2n}, et par là même les nombres $\zeta(2n)$. Sa démonstration fait appel accessoirement à la fonction $x \mapsto x/(e^x-1)$, dont la partie impaire est $-x/2$, comme lecteur pourra s'en convaincre directement.

Voir aussi l'exercice 67 de la leçon 405 sur ce sujet, ainsi que l'exercice 5 pour la mise en œuvre de méthodes similaires.

Exercice 4.– On montre, à l'aide de résultats de sommabilité d'une suite de nombres complexes, que la fontion inverse de n'importe quelle fonction développable en série entière et qui ne s'annule pas en 0, est elle-même développable en série entière ; on en donne en illustration deux applications faciles.

Exercice 5.– On montre dans cet exercice un résultat classique et important, à savoir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable réelle admette un développement en série entière.

Exercice 6.– Dans cet exercice, on obtient un développement en série entière de la fonction génératrice des polynômes de Legendre, à savoir la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}}\cdot$

Chapitre II

Exemples d'applications des séries entières

Exercice (1).
Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}) : \quad xy'' + 2y' - xy = 0.$$

1. Déterminer les solutions de $(\mathcal{H})$ développables en séries entières.
2. Résoudre $(\mathcal{H})$.
3. Résoudre $(\mathcal{H})$ avec le changement de fonction $z(x) = xy(x)$.

▶ **Corrigé.–**

On résout ici l'équation différentielle donnée par l'énoncé, en l'occurrence

$$(\mathcal{H}) : \quad x\times y''(x) + 2y'(x) - x\times y(x) = 0.$$

1. On suppose que $(\mathcal{H})$ possède une solution développable en série entière, sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $x \in]-R\,;R[$, on a :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \times x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n \times x^{n-2},$$

d'où, pour tout $x \in]-R\,;R[$,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n \times x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \times x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n-1)+2n\big)a_n \times x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_n \times x^{n-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} \times x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)(k+2)a_{k+1} \times x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} \times x^k \\
&= 2a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \big((k+1)(k+2)a_{k+2} - a_{k-1}\big) \times x^k.
\end{aligned}$$

D'où, $a_1 = 0$, et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_{k+1} = \dfrac{a_{k-1}}{(k+1)\times(k+2)}$,

soit $\begin{cases} a_{2k+1} = \dfrac{a_{2k-1}}{(2k+1)\times(2k+2)} & \forall k \in \mathbb{N}^* \\ \text{et} & \\ a_{2k+2} = \dfrac{a_{2k}}{(2k+2)(\times 2k+3)} & \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Une récurrence facile donne alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k} = \frac{a_0}{(2k+1)!},$$

d'où $y(x) = a_0 \times \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = a_0 \times \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$, et $R = +\infty$.

2. Sur $I_1 =]-\infty\,;0[$ ou $I_2 =]0\,;+\infty[$, on cherche une deuxième solution, linéairement indépendante de la fonction $y_1 :\ x \mapsto \operatorname{sh}(x)/x$.

   On pose $y(x) = \lambda(x) \times y_1(x)$; alors, pour tout réel x,

$$y'(x) = \lambda'(x) \times y_1(x) + \lambda(x) \times y_1'(x)$$

   et

$$y''(x) = \lambda''(x) \times y_1(x) + 2\lambda'(x) \times y_1'(x) + \lambda(x) \times y_1''(x),$$

   d'où, pour tout réel x non nul,

$$\begin{aligned}
0 &= x \times y''(x) + 2y'(x) - x \times y(x) \\
&= \lambda(x) \times \big(\underbrace{x \times y_1''(x) + 2y_1'(x) - x \times y_1(x)}_{=0}\big) \\
&\qquad + \lambda'(x) \times \big(2y_1(x) + 2x \times y_1'(x)\big) + \lambda''(x) \times x \times y_1(x).
\end{aligned}$$

Or, $x\times y_1(x) = x\times \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \mathrm{sh}(x)$, et

$$2y_1(x) + 2x\times y_1'(x) = 2\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} + 2x\times \frac{x\times\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{x^2} = 2\mathrm{ch}(x),$$

d'où $\lambda''(x) = -\dfrac{2\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\times\lambda'(x)$.

Ainsi, il existe un réel α tel que, pour tout x non nul,

$$\lambda'(x) = \alpha\times \exp\left(-2\int \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\mathrm{d}x\right) = \alpha\times e^{-2\ln(|\mathrm{sh}(x)|)} = \frac{\alpha}{\mathrm{sh}^2(x)},$$

et $\lambda(x) = \alpha\times\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2(x)} = \alpha\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\cdot$

On obtient ainsi des solutions particulières de $(\mathcal{H})$ sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda(x)\times y_1(x) = \alpha\times \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\times\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \alpha\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{x}\cdot$$

La fonction $y_2 :\ x\mapsto \mathrm{ch}(x)/x$ est donc solution de $(\mathcal{H})$ sur $I_1 =]-\infty\,;0[$, ou sur $I_2 =]0\,;+\infty[$.

On conclut que sur I_1 ou I_2, on a l'égalité $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, avec

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_1(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\quad\text{et}\quad y_2(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{x}\cdot$$

Remarque.– En posant $z(x) = x\times y(x)$, nous avons alors

$$z'(x) = x\times y'(x) + y(x),\quad \text{et } z''(x) = x\times y''(x) + 2y'(x).$$

La fonction $x\mapsto z(x)$ vérifie dès lors l'équation différentielle

$$z''(x) - z(x) = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont donc de la forme

$$z :\ x\mapsto \alpha\times\mathrm{ch}(x) + \beta\times\mathrm{sh}(x),$$

pour α et β parcourant $\mathbb{R}$.

Il en résulte que sur $I_1 =]-\infty\,;0[$ ou sur $I_2 =]0\,;+\infty[$, les solutions sont les fonctions

$$y :\ x\mapsto \alpha\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{x} + \beta\times\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\cdot$$

Exercice (2). Intégrale de Poisson

Soit $\theta \in]0\,;\pi[$, et soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) \end{array}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction f.

   Indication.– Calculer f'.

2. En déduire que $\forall x \in]-1\,;1[,\ \displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)\mathrm{d}\theta = 0$.

3. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)\mathrm{d}\theta$.

4. Que dire si $x = 1$ ou $x = -1$?

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x - 2\cos(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} = \frac{x - e^{\mathrm{i}\theta} + x - e^{-\mathrm{i}\theta}}{(x - e^{\mathrm{i}\theta})\times(x - e^{-\mathrm{i}\theta})} \\ &= \frac{1}{x - e^{-\mathrm{i}\theta}} + \frac{1}{x - e^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{-e^{\mathrm{i}\theta}}{1 - e^{\mathrm{i}\theta}x} + \frac{-e^{-\mathrm{i}\theta}}{1 - e^{-\mathrm{i}\theta}x} \\ &= -e^{\mathrm{i}\theta}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\mathrm{i}\theta}\times x\right)^n - e^{-\mathrm{i}\theta}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-\mathrm{i}\theta}\times x\right)^n, \quad \text{si } |x| < 1, \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}\times x^n + \left(e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}\times x^n\right) \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\mathrm{i}(n+1)\theta} + e^{-\mathrm{i}(n+1)\theta}\right)\times x^n \\ &= -2\times\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left((n+1)\theta\right)\times x^n. \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} - 2\times\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left((n+1)\theta\right)\times\frac{x^{n+1}}{n+1} = -2\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}\times x^n.$$

2. D'après 1, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\int_0^{\pi}\ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)\mathrm{d}\theta = -2\int_0^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}\times x^n\right)\mathrm{d}\theta.$$

Or, pour tout $\theta\in[0;\pi]$, on a $\left|\dfrac{\cos(n\theta)}{n}\times x^n\right|\leqslant|x|^n$, et la série géométrique $\sum|x|^n$ converge car $|x|<1$: par conséquent, la série $\sum\dfrac{\cos(n\theta)}{n}\times x^n$ converge normalement sur $[0;\pi]$, d'où

$$\int_0^\pi\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos(n\theta)\Big)\mathrm{d}\theta=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\times\int_0^\pi\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta=0.$$

Ainsi, pour tout $x\in\,]-1;1[$, on a $\displaystyle\int_0^\pi\ln\big(x^2-2x\cos(\theta)+1\big)\mathrm{d}\theta=0.$

3. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $|x|>1$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi\ln\big(x^2-2x\cos(\theta)+1\big)\mathrm{d}\theta&=\int_0^\pi\ln\Big(x^2\big(1-\frac{2}{x}\cos(\theta)+\frac{1}{x^2}\big)\Big)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\pi\ln(x^2)\mathrm{d}\theta+\int_0^\pi\ln\Big(\big(\frac{1}{x}\big)^2-\frac{2}{x}\cos(\theta)+1\Big)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^\pi\ln(x^2)\mathrm{d}\theta,\qquad\text{car }\left|\frac{1}{x}\right|<1,\\&=\pi\ln(x^2)=2\pi\ln(|x|).\end{aligned}$$

4. On a, pour $\theta\in\,]0;\pi]$,

$$f(1)=\ln\big(2-2\cos(\theta)\big)=\ln\Big(4\sin^2\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big)=2\ln(2)+2\ln\Big(\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big),$$

et
$$\begin{aligned}2\ln\Big(\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big)&=2\ln\big(\frac{\theta}{2}+o_0(\theta)\big)=2\ln\Big(\theta\big(\frac{1}{2}+o_0(1)\big)\Big)\\&=2\ln(\theta)+2\ln\big(\frac{1}{2}+o_0(1)\big)\underset{\theta\to0}{\sim}2\ln(\theta).\end{aligned}$$

Or, pour $\varepsilon\in\big]0;\pi/2\big[$,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{\pi/2}\ln(\theta)\mathrm{d}\theta&=[\theta\ln(\theta)-\theta]_\varepsilon^{\pi/2}\\&=\frac{\pi}{2}\ln\big(\frac{\pi}{2}\big)-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\ln(\varepsilon)-\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0^+]{}\frac{\pi}{2}\ln\big(\frac{\pi}{2}\big)-\frac{\pi}{2}\cdot\end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta$ converge. Le changement de variable $\varphi=\pi-\theta$ donne alors

$$\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta=\int_{\pi/2}^\pi\ln\big(\sin(\varphi)\big)\mathrm{d}\varphi,$$

de sorte que $\displaystyle\int_0^\pi\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta.$

Le changement de variable $u=\pi/2-\theta$ donne, pour sa part,

$$\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\pi/2}\ln\Big(\sin\big(\frac{\pi}{2}-u\big)\Big)\mathrm{d}u=\int_0^{\pi/2}\ln\big(\cos(u)\big)\mathrm{d}u,$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2} \ln\big(\cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(\theta)\cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \ln\Big(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\Big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{\pi}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(x)\big)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{avec } x = 2\theta.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = -\pi\ln(2),$$

et

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ln\big(2-2\cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} \Big(2\ln(2) + 2\ln\Big(\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big)\Big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\ln(2) + 2\int_0^{\pi} \ln\Big(\sin\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\ln(2) + 4\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(u)\big)\,\mathrm{d}u, \quad \text{avec } u = \frac{\theta}{2}, \\ &= 2\pi\ln(2) - 4\times\frac{1}{2}\pi\ln(2) = 0 = f(1).\end{aligned}$$

Pour le calcul de $f(1)$, le changement de variable $\theta = \pi - \varphi$ donne

$$\begin{aligned}f(-1) &= \int_0^{\pi} \ln\big(2+2\cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln\big(2+2\cos(\pi-\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \ln\big(2-2\cos(\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi = 0.\end{aligned}$$

Exercice (3). Application au dénombrement

Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}$). On appelle **dérangement** de E toute permutation σ de E n'ayant aucun point fixe.

On note δ_n le nombre de dérangements de E. Ainsi, $\delta_1 = 0$ et par convention, $\delta_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_k$.
2. Soit $f : \left]-1;1\right[\to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n}{n!} x^n.$$

   a) Justifier la définition de f.

   b) Montrer que, $\forall x \in \left]-1;1\right[, \quad f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

   c) En déduire que

$$\delta_n = n! \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

3. Calculer de deux façons différentes le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)},$$

   et en déduire une formule pour le nombre de couples $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2p + 3q = n$, où n est un entier naturel.

▶ **Corrigé.–**

1. Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$; il y a $\binom{n}{k}$ parties de E à k éléments, et pour chacune de ces parties il y a δ_{n-k} permutations de E qui laissent fixes les éléments de cette partie tout en dérangeant les autres éléments de E. Il y a donc, en tout, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_{n-k}$ permutations de E, et donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} \delta_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \delta_j.$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \delta_n \leqslant n!$, donc $0 \leqslant \delta_n / n! \leqslant 1$, donc si $0 \leqslant r < 1$ la série $\sum \dfrac{\delta_n}{n!} r^n$ converge.

   Ainsi, le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{\delta_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1, ce qui justifie la définition de f.

   b) On a pour tout $x \in \left]-1\,;1\right[$, $\quad f(x) e^x = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta_k}{k!} x^k \right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right)$.

Comme ces deux séries entières convergent absolument, alors en utilisant le produit de Cauchy, on a, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\begin{aligned} f(x)e^x &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{\delta_k}{k!(n-k)!}\Big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\delta_k\Big)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}, \end{aligned}$$

et donc $f(x) = e^{-x}/(1-x)$ pour tout $x \in]-1\,;1[$.

c) Toujours en utilisant le produit de Cauchy, on a pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\begin{aligned} f(x) = e^{-x}\times\frac{1}{1-x} &= \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\Big)\times\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\Big)x^n, \end{aligned}$$

et donc par identification des coefficients, $\dfrac{\delta_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\delta_n = n!\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\Big).$$

3. **Premier calcul.** Pour $|x| < 1$,

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x^2-1}\times\frac{1}{x^3-1} &= \Big(-\sum_{p=0}^{+\infty}x^{2p}\Big)\times\Big(-\sum_{q=0}^{+\infty}x^{3q}\Big) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\,;\\ 2p+3q=n}}1\Big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n, \end{aligned}$$

avec $a_n = \mathrm{Card}\big(\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid 2p+3q=n\}\big)$.

Deuxième calcul. On procède à la décomposition en éléments simples de $f(x)$ pour $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)} \\ &= \frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x-j)(x-j^2)} \\ &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{x-j}+\frac{E}{x-j^2}, \end{aligned}$$

où
$$B=\frac{1}{(1+1)(1+1+1)}=\frac{1}{6},\quad C=\frac{1}{(-1-1)^2(1-1+1)}=\frac{1}{4},$$
$$\begin{aligned}D&=\frac{1}{(j^2-1)(j-1)(j-j^2)}=\frac{1}{(2-j-j^2)(j-j^2)}\\&=\frac{1}{3\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{3\mathrm{i}\sqrt{3}}=-\frac{\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$
et $E=\overline{D}=\dfrac{\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}$.

En calculant de deux façons différentes $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$, on obtient
$$0=A+0+C+D+E \iff A+C=0 \iff A=-C=-\frac{1}{4},$$
et donc, pour $|x|<1$,
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+x}\\&\qquad+\frac{\mathrm{i}j^2}{3\sqrt{3}}\times\frac{1}{1-xj}-\frac{\mathrm{i}j}{3\sqrt{3}}\times\frac{1}{1-xj^2}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{n+1}{6}+\frac{(-1)^n}{4}+\frac{\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}\left(j^{n+2}-j^{2n+1}\right)\right)x^n,\end{aligned}$$
d'où, $\forall n\in\mathbb{N}$,
$$a_n=\frac{5}{12}+\frac{(-1)^n}{4}+\frac{n}{6}+\frac{\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}\left(j^{n+2}-j^{2n+1}\right).$$

Exercice (4). Théorème radial d'Abel – Application

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose que la série $\sum a_n R^n$ converge, et l'on pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k \quad \text{et} \quad \forall x \in]-R;R[, \;\; R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

1. a) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;R[$,

$$R_n(x) = r_n\Big(\frac{x}{R}\Big)^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k\Big(\Big(\frac{x}{R}\Big)^{k+1} - \Big(\frac{x}{R}\Big)^{k}\Big).$$

   b) En déduire que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0\,;R]$, puis que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim_{\substack{x \to R \\ x < R}} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big).$$

2. **Applications**

   a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+np} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^p}, \quad \text{intégrale notée } I_p.$$

   Calculer I_1, I_2 et I_3.

   b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(n+2)},$$

   et montrer que, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} = -(x^2+1)\ln(1-x^2) - 2x\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) + 3x^2.$$

   En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)} = 3 - 4\ln(2)$.

   c) Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes, telles qu'en posant $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum c_n$ converge. Montrer que

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

▶ **Corrigé.**–

1. a) Pour tout $x \in [0\,;R[$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k \Big(\frac{x}{R}\Big)^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (r_{k-1} - r_k)\Big(\frac{x}{R}\Big)^k$$

$$= \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_{k-1}\Big(\frac{x}{R}\Big)^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k\Big(\frac{x}{R}\Big)^k$$

(les séries convergent, car la suite (r_k) est bornée et $|x/R| < 1$)

$$= r_n\Big(\frac{x}{R}\Big)^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k\Big(\Big(\frac{x}{R}\Big)^{k+1} - \Big(\frac{x}{R}\Big)^k\Big).$$

b) Soit $\varepsilon > 0$; comme $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ alors $|r_n| < \varepsilon$. On a donc, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $x \in [0\,;R[$,

$$|R_n(x)| \leqslant |r_n| \times \Big(\frac{x}{R}\Big)^{n+1} + \varepsilon \times \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\Big(\frac{x}{R}\Big)^k - \Big(\frac{x}{R}\Big)^{k+1}\Big)$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon \times \Big(\frac{x}{R}\Big)^{N+1} < 2\varepsilon.$$

Comme $|r_n| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, on a alors $|R_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$ pour tout réel $x \in [0\,;R]$, et la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0\,;R]$. Par conséquent, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = \lim\limits_{x\to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2. **Applications**

a) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^p}{1+np}$ converge ; il vient alors, d'après le théorème radial d'Abel,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+np} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{1+np}}{1+np} = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 t^{np}\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \int_0^1 t^{np}\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{np}\Big)\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^p)^{N+1}}{1+t^p}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^p} - (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{t^{(N+1)p}}{1+t^p}\mathrm{d}t,$$

et $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(N+1)p}}{1+t^p}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{(N+1)p}\mathrm{d}t = \frac{1}{1+(N+1)p} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+np} = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^p}$, d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2).$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(t^2-t+1)} \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{3}\ln(2) - 0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\Big(\arctan\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) - \arctan\Big(\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}\cdot\end{aligned}$$

b) D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série est égal à 1. D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\cdot$$

Les séries entières $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{n}$, $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{n+1}$ et $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{2n+1}$ ont un rayon de convergence égal à 1, et l'on a donc pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} - 4x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x^2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - 4x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - x\Big) \\ &= -x^2\ln(1-x^2) - \ln(1-x^2) - x^2 - 4x\Big(-\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)\Big) + 4x^2 \\ &= -(x^2+1)\ln(1-x^2) - 2x\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) + 3x^2 \\ &= -(x+1)^2\ln(1+x) - (1-x)^2\ln(1-x) + 3x^2 \xrightarrow[x\to 1^-]{} -4\ln(2) - 0 + 3.\end{aligned}$$

On conclut donc grâce au théorème radial d'Abel :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = 3 - 4\ln(2).$$

c) Les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ étant convergentes, les trois séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à 1.

D'après le théorème radial d'Abel, les fonctions

$$f:\ \begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\end{array} \quad , \quad g:\ \begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\end{array} \quad \text{et} \quad h:\ \begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\end{array}$$

sont donc continues, et les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes pour tout $x \in [0\,;1[$. Le produit de convolution s'applique donc, et pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f(x)g(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = h(x),$$

puis

$$h(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)g(x) = \Big(\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)\Big) \times \Big(\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)\Big) = f(1)g(1),$$

ce qui est bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Exercice (5). Application à l'algèbre.– Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $R > ||A||$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et que son inverse est
$$(Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(Re^{\mathrm{i}\theta})^{-k}A^k\Big).$$
2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{\mathrm{i}\theta})^k(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A)^{-1}\mathrm{d}\theta = A^{k-1}.$$
En déduire que pour tout polynôme P, on a
$$P(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re^{\mathrm{i}\theta}P(Re^{\mathrm{i}\theta})(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A)^{-1}\mathrm{d}\theta.$$
3. On note χ_A le polynôme caractéristique de la matrice A, autrement dit $\chi_A(X) = \det(A - X\mathrm{I}_n)$. Montrer que
$$\chi_A(A) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re^{\mathrm{i}\theta}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A)\mathrm{d}\theta,$$
et en déduire que $\chi_A(A) = 0$.

▶ **Corrigé.–**

1. On a $Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A = Re^{\mathrm{i}\theta}\big(\mathrm{I}_n - (Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}A\big)$, et $||(Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}A|| = ||A||/R < 1$, si bien que la matrice $\mathrm{I}_n - (Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}A$ est inversible [1], et
$$\big(\mathrm{I}_n - (Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}A\big)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(Re^{\mathrm{i}\theta})^{-k}A^k.$$
La matrice $Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A$ est dès lors inversible, et
$$\begin{aligned}\big(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A\big)^{-1} &= (Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}\big(\mathrm{I}_n - (Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}A\big)^{-1}\\ &= (Re^{\mathrm{i}\theta})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(Re^{\mathrm{i}\theta})^{-k}A^k\Big).\end{aligned}$$

1. C'est classique, mais il est bon de rappeler que l'on utilise ici l'hypothèse fournie sur la norme, ainsi que le fait que l'espace des matrices est de Banach, de sorte que toute série qui est y normalement convergente est convergente.

2. D'après 1,

$$(Re^{\mathrm{i}\theta})^k(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A)^{-1}=(Re^{\mathrm{i}\theta})^{k-1}\Big(\sum_{r=0}^{+\infty}(Re^{\mathrm{i}\theta})^{-r}A^r\Big)=\sum_{r=0}^{+\infty}(Re^{\mathrm{i}\theta})^{k-1-r}A^r.$$

Or, pour tout $r\in\mathbb{N}$, $||(Re^{\mathrm{i}\theta})^{k-1-r}A^r||=R^{k-1}(||A||/R)^r$, et la série géométrique $\sum(||A||/R)^r$ converge puisque $||A||/R<1$, si bien que la série « trigonométrique matricielle » $\sum(Re^{\mathrm{i}\theta})^{k-1-r}A^r$ est normalement convergente, d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{r=0}^{+\infty}(Re^{\mathrm{i}\theta})^{k-1-r}A^r\Big)\mathrm{d}\theta&=\sum_{r=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}(k-1-r)\theta}\mathrm{d}\theta\Big)R^{k-1-r}A^r\\&=A^{k-1},\end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{\mathrm{i}(k-1-r)\theta}\mathrm{d}\theta=\begin{cases}2\pi & \text{si } r=k-1\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

Soit alors $P=\sum_{k=0}^m a_kX^k$ un polynôme ; on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Re^{\mathrm{i}\theta}P(Re^{\mathrm{i}\theta})(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A)^{-1}\mathrm{d}\theta\\&\qquad=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Re^{\mathrm{i}\theta}\sum_{k=0}^m a_k(Re^{\mathrm{i}\theta})^k(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A)^{-1}\mathrm{d}\theta\\&\qquad=\sum_{k=0}^m a_k\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{\mathrm{i}\theta})^{k+1}(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A)^{-1}\mathrm{d}\theta\Big)\\&\qquad=\sum_{k=0}^m a_kA^k,\quad\text{d'après 1,}\\&\qquad=P(A).\end{aligned}$$

3. D'après 2,

$$\chi_A(A)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Re^{\mathrm{i}\theta}\chi_A(Re^{\mathrm{i}\theta})(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A)^{-1}\mathrm{d}\theta,$$

et en posant $M=Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A$, on a

$$\det(M)=\det(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A)=(-1)^n\det(A-Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n)=(-1)^n\chi_A(Re^{\mathrm{i}\theta}),$$

d'où

$$\begin{aligned}\chi_A(Re^{\mathrm{i}\theta})(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A)^{-1}&=(-1)^n\det(M)M^{-1}=(-1)^n\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(M)\\&=(-1)^n\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A),\end{aligned}$$

et donc

$$\chi_A(A)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}Re^{\mathrm{i}\theta}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n-A)\mathrm{d}\theta.$$

Les coefficients de la matrice $\mathrm{com}(X\mathrm{I}_n - A)$ sont des polynômes en X, et les coefficients de la matrice $e^{\mathrm{i}\theta}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A)$ sont dès lors des combinaisons linéaires des fonctions $\theta \mapsto e^{\mathrm{i}k\theta}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$.

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}k\theta}\mathrm{d}\theta = 0$, alors

$$\chi_A(A) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re^{\mathrm{i}\theta}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(Re^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{I}_n - A)\mathrm{d}\theta = 0.$$

Exercice (6). Théorème taubérien fort. Soit (a_n) une suite de nombres réels telles que $a_n = O(1/n)$. On suppose que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1 et que sa somme S vérifie $\lim_{x\to 1^-} S(x) = 0$. Soit l'ensemble $\mathcal{A}$ des fonctions $f:\ [0\,;1] \to \mathbb{R}$ telles que

(i) pour tout $x \in [0\,;1]$, la série $\sum a_n f(x^n)$ converge

(ii) $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n f(x^n) = 0$.

1. a) Montrer que toute fonction polynomiale nulle en 0 appartient à $\mathcal{A}$.

   b) Soit p une fonction polynomiale. Montrer que

$$(1-x)\times\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n p(x^n)\Big) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \int_0^1 p(t)\mathrm{d}t.$$

2. Soit la fonction

$$\begin{aligned} g:\ [0\,;1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \end{aligned}$$

   et soit $\varepsilon > 0$.

   a) Déterminer deux fonctions polynomiales r_1 et r_2 telles que :

$$\begin{cases} \forall x \in [0\,;1],\ x + x(1-x)r_1(x) \leqslant g(x) \leqslant x + x(1-x)r_2(x) \\ \text{et } \displaystyle\int_0^1 \big(r_2(x) - r_1(x)\big)\mathrm{d}x < 5\varepsilon. \end{cases}.$$

   b) En déduire que $g \in \mathcal{A}$, puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

3. Conclure que, si (b_n) est une suite réelle vérifiant $b_n = O(1/n)$ et si $\lim\limits_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$), alors la série $\sum b_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \ell$.
   (*Il s'agit du théorème taubérien fort de Hardy et Littlewood.*)

4. **Application.** Soit la fonction

$$\begin{aligned} S\ :\ ]-1\,;1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\mathrm{i}n\theta}\,\frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

Justifier la bonne définition de S, et montrer que

$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad S'(x) = \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}x}.$$

En déduire que

$$S(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) + \mathrm{i}\arctan\left(\frac{x\sin(\theta)}{1-x\cos(\theta)}\right),$$

puis que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2}\ln\left(2-2\cos(\theta)\right)$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)\right).$$

▶ **Corrigé.–**

1. a) Considérons pour commencer le cas où $p(x) = x^r$ ($r \in \mathbb{N}^*$). Si $x \in [0\,;1[$, alors $x^r \in [0\,;1[$ et comme $R \geqslant 1$, alors la série $\sum a_n(x^r)^n$ converge, et
$$S(x^r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x^r)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x^n)^r = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n),$$
et de plus $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n) = S(x^r) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$ par hypothèse.
Le monôme X^r est donc élément de $\mathcal{A}$, et par linéarité de S, pour tout polynôme $p\,:\, x \mapsto \sum_{r=1}^{n} b_r x^r$ (nul en 0), on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p(x^n) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$ et $p \in \mathcal{A}$.

   b) Pour tout $x \in [0\,;1[$, en commençant là encore avec $p(x) = x^r$, on a
$$\begin{aligned}(1-x)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n p(x^n)\right) &= (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^n x^{rn} = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n(1+r)}\\ &= (1-x)\frac{1}{1-x^{1+r}} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+\cdots+x^r)}\\ &= \frac{1}{1+x+\cdots+x^r}\\ &\xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{r+1} = \int_0^1 t^r\,\mathrm{d}t = \int_0^1 p(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Le résultat s'étend alors au cas d'un polynôme quelconque, par linéarité.

2. a) Soit la fonction $h:\ [0\,;1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$h(0)=-1,\quad h(1)=1\ \text{ et }\ \forall x\in\,]0\,;1[,\ h(x)=\frac{g(x)-x}{x(1-x)}\cdot$$

On a alors $h(x)=\begin{cases}-1/(1-x) & \text{si } 0\leqslant x<1/2\\ 1/x & \text{si } 1/2\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$

On définit aussi, pour tout entier $n\geqslant 3$, les fonctions g_n et h_n sur l'intervalle $[0\,;1]$ par

$$\begin{cases}g_n(x)=h(x), & \text{si } x\in[0\,;1/2]\cup[1/2+1/n\,;1],\\ g_n \text{ est continue sur } [0\,;1] \text{ et affine sur } [1/2\,;1/2+1/n]\end{cases}$$

et

$$\begin{cases}h_n(x)=h(x), & \text{si } x\in[0\,;1/2-1/n]\cup[1/2\,;1],\\ h_n \text{ est continue sur } [0\,;1] \text{ et affine sur } [1/2-1/n\,;1/2].\end{cases}$$

On a alors $\forall x\in[0\,;1],\ g_n(x)\leqslant h(x)\leqslant h_n(x)$ et

$$0\leqslant\int_0^1\big(h_n(t)-g_n(t)\big)\mathrm{d}t=\int_{\frac12-\frac1n}^{\frac12+\frac1n}\big(h_n(t)-g_n(t)\big)\mathrm{d}t\leqslant\int_{\frac12-\frac1n}^{\frac12+\frac1n}4\mathrm{d}t=\frac{8}{n}\cdot$$

Soit maintenant $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $8/N<\varepsilon$: les fonctions g_N et h_N sont continues sur $[0\,;1]$, $g_N\leqslant h\leqslant h_N$ et $\displaystyle\int_0^1\big(h_N(t)-g_N(t)\big)\mathrm{d}t<\varepsilon$.

Par ailleurs, d'après le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe deux fonctions polynômes S_1 et S_2 telles que pour tout $x\in[0;1]$, on ait $\big|S_1(x)-g_N(x)\big|<\varepsilon$ et $\big|S_2(x)-h_N(x)\big|<\varepsilon$.

Soient alors $r_1=S_1-\varepsilon$ et $r_2=S_2+\varepsilon$; on a pour tout $x\in[0\,;1]$:

$$r_1(x)<g_N(x)\leqslant h(x)\leqslant h_N(x)\leqslant r_2(x),\qquad 0\leqslant g_N(x)-r_1(x)<2\varepsilon$$
$$\text{et }\ 0\leqslant r_2(x)-h_N(x)<2\varepsilon.$$

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1\big(r_2(x)-r_1(x)\big)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\big(4\varepsilon+h_N(x)-g_N(x)\big)\mathrm{d}x<5\varepsilon.$

b) Soit $x\in[0\,;1[$, et soit $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $0\leqslant x^N<1/2$: alors, pour tout $k\geqslant N$, on a $0\leqslant x^k<1/2$, donc $g(x^k)=0$, et la série $\sum a_k g(x^k)$ converge (et $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n g(x^n)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n g(x^n)$).

De plus, $a_n=O(1/n)$, donc il existe $M>0$ tel que $|a_n|\leqslant M/n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Soient alors les fonctions polynomiales p_1 et p_2 définies sur le segment $[0\,;1]$ par $p_i(x)=x+x(1-x)r_i(x)$ $(i\in\{1\,;2\})$.

On a dès lors, pour tout $x \in [0\,;1[$,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\Big| &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\big(p_2(x^n) - p_1(x^n)\big)\\ &\leqslant M\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n(1-x^n)}{n}\big(r_2(x^n) - r_1(x^n)\big).\end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0\,;1[$,

$$1-x^n = (1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) \leqslant n(1-x), \text{ donc } \frac{1-x^n}{n} \leqslant 1-x,$$

et

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\Big| \leqslant M(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\big(r_2(x^n) - r_1(x^n)\big).$$

Or, d'après 1.b),

$$(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\big(r_2(x^n) - r_1(x^n)\big) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \int_0^1 \big(r_2(t) - r_1(t)\big)\mathrm{d}t < 5\varepsilon.$$

Comme d'après 1.a), $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$, alors il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in]1-\eta\,;1[$, alors $\begin{cases} \big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\big| < \varepsilon \\ \text{et } (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\big(r_2(x^n) - r_1(x^n)\big) < 6\varepsilon, \end{cases}$

si bien que, pour tout $x \in]1-\eta\,;1[$,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n)\Big| &\leqslant \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\Big| + \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n p_1(x^n)\Big|\\ &\leqslant \varepsilon + M\times 6\varepsilon = (6M+1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$, et $g \in \mathcal{A}$.
Enfin, pour tout $x \in]0\,;1[$,

$$\sum_{n=0}^{-\ln(2)/\ln(x)} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(x^n) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0, \quad \text{car } g \in \mathcal{A},$$

donc la série $\sum a_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

3. En posant $a_0 = b_0 - \ell$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = b_n$, on a $a_n = O(1/n)$, et la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon de convergence $R \geqslant 1$, et pour tout $x \in]0\,;1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n - \ell \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$, si bien que,

d'après 2.b),
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \ell = \ell.$$

4. **Application.** D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum (e^{in\theta}/n) z^n$ est égal à 1, donc S est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$, et donc pour tout $x \in]-1\,;1[$,
$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} x^n = e^{i\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{i\theta} x)^n = \frac{e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta} x} \\ &= \frac{e^{i\theta}(1 - e^{-i\theta} x)}{|1 - e^{i\theta} x|^2} = \frac{e^{i\theta} - x}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} \\ &= \frac{\cos(\theta) - x}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} + i \times \frac{\sin(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1}, \end{aligned}$$
d'où, pour tout $x \in]-1\,;1[$,
$$\begin{aligned} S(x) = S(0) &- \frac{1}{2} \ln\big(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\big) \\ &+ i \int_0^x \frac{1}{1 + \big(\frac{t\sin(\theta)}{1 - t\cos(\theta)}\big)^2} \times \frac{\sin(\theta)}{\big(1 - t\cos(\theta)\big)^2} \, dt \\ = 0 &- \frac{1}{2} \ln\big(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\big) + i \times \arctan\Big(\frac{x\sin(\theta)}{1 - x\cos(\theta)}\Big). \end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n = \mathrm{Re}\big(S(x)\big) \xrightarrow[x \to 1^-]{} -\frac{1}{2} \ln\big(2 - 2\cos(\theta)\big)$$
$$\text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} x^n = \mathrm{Im}\big(S(x)\big) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \arctan\Big(\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}\Big),$$
et l'on a donc, d'après le théorème taubérien fort, pour $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2} \ln\big(2 - 2\cos(\theta)\big)$$
$$\begin{aligned} \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} &= \arctan\Big(\frac{\sin(\theta)}{1 - \cos(\theta)}\Big) = \arctan\left(\frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \arctan\Big(\cot\Big(\frac{\theta}{2}\Big)\Big) = \arctan\Big(\tan\Big(\frac{\pi - \theta}{2}\Big)\Big). \end{aligned}$$

Commentaires sur les exercices de cette leçon

Exercice 1.– Un exercice très classique de résolution d'une équation différentielle du second ordre.

Exercice 2.– Un autre exercice classique dans lequel on passe par un développement en série entière pour calculer une intégrale connue de Poisson.

Exercice 3.– On commence dans cet exercice, par calculer le nombre de dérangements via l'utilisation de séries entières et d'un produit de Cauchy de telles séries.
La deuxième partie de l'exercice permet d'obtenir le développement en série entière d'une fraction rationnelle ; on y utilise à nouveau un produit de Cauchy afin d'établir un résultat plus précis.

Exercice 4.– On démontre dans cet exercice, le très utile théorème radial d'Abel, avant d'en donner trois applications.
Cette preuve aurait aussi pu être illustrée avec l'application donnée dans l'exercice 6, du théorème taubérien fort.

Exercice 5.– Un exercice original dans lequel on utilise des développements en série entière pour démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Exercice 6 : Un exercice difficile et très technique, qui aurait également pu figurer dans la leçon 409 (utilisation des polynômes en analyse). Comme souvent, l'énoncé se conclut par une application du résultat général démontré précédemment.

Chapitre III

Exemples de séries de Fourier et de leurs applications

Exercice (1). Utilisation d'une série de Fourier

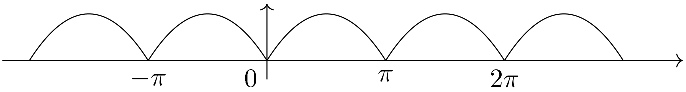
1. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;\pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^3}.$$

2. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^6 = \pi^6/945$.

▶ **Corrigé.–**

1. ▷ Soit f la fonction paire, π-périodique, définie pour tout x de $[0\,;\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.



La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge (normalement) vers elle.

Comme f est paire, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; ensuite,

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi t - t^2)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \Big[\pi \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\Big]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\Big) = \frac{\pi^2}{3}.$$

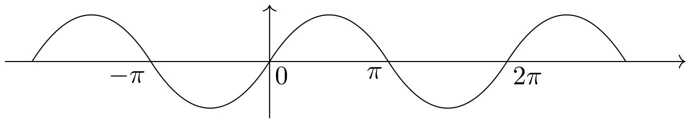
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(2nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi t - t^2)\cos(2nt)\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[(\pi t - t^2)\frac{\sin(2nt)}{2n}\Big]_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\sin(2nt)\mathrm{d}t\Big) \quad \text{(I.P.P.)}\\
&= -\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\sin(2nt)\mathrm{d}t\\
&= -\frac{1}{\pi n}\Big(\Big[-(\pi - 2t)\frac{\cos(2nt)}{2n}\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(2nt)\mathrm{d}t}_{=1-1=0}\Big) \quad \text{(I.P.P. encore)}\\
&= \frac{-1}{2\pi n^2}(\pi + \pi) = -\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

La série de Fourier obtenue pour f donne donc, pour tout x de $[0\,;\pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}.$$

▷ Soit maintenant g la fonction impaire, 2π-périodique, définie pour tout x de $[0\,;\pi]$, par $g(x) = x(\pi - x)$.



La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge (normalement) vers elle-même. Comme g est impaire, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n(g) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi t - t^2)\sin(nt)\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[-(\pi t - t^2)\frac{\cos(nt)}{n}\Big]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\cos(nt)\mathrm{d}t\Big) \quad \text{(I.P.P.)}\\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(\pi - 2t)\cos(nt)\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{\pi n}\Big(\underbrace{\Big[(\pi - 2t)\frac{\sin(nt)}{n}\Big]_0^{\pi}}_{=0} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)\mathrm{d}t\Big) \quad \text{(I.P.P.)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\Big[\frac{-\cos(nt)}{n}\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}\big(-(-1)^n+1\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{8}{\pi n^3} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

La série de Fourier obtenue pour g donne donc :

$$\forall x \in [0\,;\pi], \quad x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^3}.$$

2. La fonction f est π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et l'on a donc d'après la formule de Parseval,

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi^2}{3}\Big)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(t)\big)^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2t^2 - 2\pi t^3 + t^4)\mathrm{d}t,$$

soit

$$\frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5}\Big) = 2\pi^4\,\frac{10-15+6}{30} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Ainsi,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \Big(\frac{1}{15} - \frac{1}{18}\Big)\pi^4 = \frac{6-5}{90}\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

De même, la fonction g est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, si bien que

$$\Big(\frac{8}{\pi}\Big)^2\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{(2n+1)^3}\Big)^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(g(t)\big)^2\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{15}.$$

Dès lors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{15\times 64} = \frac{\pi^6}{960}$, puis

$$\zeta(6) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{64}\zeta(6).$$

Et donc,

$$\zeta(6) = \frac{64}{63}\times\frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice (2). Inégalité de Wirtinger
Soit $T>0$, et soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, vérifiant $\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$.

1. Montrer que l'on a alors
$$\int_0^T \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t,$$
2. Montrer que l'on a égalité si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que
$$f(t)=\lambda\cos\big(\frac{2\pi}{T}t\big)+\mu\sin\big(\frac{2\pi}{T}t\big).$$

▶ **Corrigé.–**

1. Les fonctions f et f' sont continues par morceaux, donc d'après la formule de Parseval :
$$\frac{1}{T}\int_0^T \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t=\frac{\big(a_0(f)\big)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f)\big)^2+\big(b_n(f)\big)^2\Big)$$
$$\text{et}\quad \frac{1}{T}\int_0^T \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t=\frac{\big(a_0(f')\big)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f')\big)^2+\big(b_n(f')\big)^2\Big)$$
Or, $a_0(f)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$ par hypothèse,

et $a_0(f')=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f'(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\big(f(T)-f(0)\big)=0$, car f est T-périodique.

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}a_n(f)&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\mathrm{d}t\quad\text{(on réalise une I.P.P.)}\\&=\frac{2}{T}\Big(\underbrace{\Big[f(t)\times\frac{T}{2\pi n}\times\sin\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\Big]_0^T}_{=0}-\frac{T}{2\pi n}\int_0^T f'(t)\sin\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\mathrm{d}t\Big)\\&=-\frac{T}{2\pi n}b_n(f')\end{aligned}$$
Par suite, $\big(a_n(f)\big)^2=\dfrac{T^2}{4\pi^2n^2}\big(b_n(f')\big)^2$, et
$$b_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\mathrm{d}t\quad\text{(on réalise encore une I.P.P.)}$$

$$= \frac{2}{T}\Big(\Big[f(t)\times\frac{-T}{2\pi n}\times\cos\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\Big]_0^T + \frac{T}{2\pi n}\int_0^T f'(t)\cos\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\,\mathrm{d}t\Big)$$
$$= \frac{2}{T}\Big(\big(\frac{-T}{2\pi n}\big)\big(\underbrace{f(T)-f(0)}_{=0}\big) + \frac{T}{2\pi n}a_n(f')\Big) = \frac{T}{2\pi n}a_n(f'),$$

de sorte que $\big(b_n(f)\big)^2 = \dfrac{T^2}{4\pi^2 n^2}\big(a_n(f')\big)^2$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f)\big)^2 + \big(b_n(f)\big)^2\Big)\\ &= \frac{T^2}{4\pi^2}\times\frac{1}{2}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\big(a_n(f')\big)^2 + \big(b_n(f')\big)^2\Big)\\ &\leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\times\frac{1}{2}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f')\big)^2 + \big(b_n(f')\big)^2\Big)\\ &= \frac{T^2}{4\pi^2}\times\frac{1}{T}\int_0^T \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'où, $\displaystyle\int_0^T \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t.$

2. L'égalité a lieu si, et seulement si (voir le calcul ci-dessus),

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\big(a_n(f')\big)^2 + \big(b_n(f')\big)^2\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f')\big)^2 + \big(b_n(f')\big)^2\Big)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-\frac{1}{n^2}\big)\Big(\big(a_n(f')\big)^2 + \big(b_n(f')\big)^2\Big) = 0.$$

Donc, pour tout $n\geqslant 2$, $\big(a_n(f')\big)^2 + \big(b_n(f')\big)^2 = 0 \Leftrightarrow a_n(f') = b_n(f') = 0$.

Ainsi, pour tout $n\geqslant 2$, $\begin{cases} a_n(f) & = \big(-T/(2\pi n)\big)b_n(f') = 0\\ \text{et } b_n(f) & = \big(T/(2\pi n)\big)a_n(f') = 0,\end{cases}$

et comme f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(t) &= \underbrace{\frac{a_0(f)}{2}}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos\big(\frac{2\pi n}{T}t\big) + b_n(f)\sin\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\\ &= a_1(f)\cos\big(\frac{2\pi}{T}t\big) + b_1(f)\sin\big(\frac{2\pi}{T}t\big),\end{aligned}$$

ce qui est bien la forme voulue. Pour terminer, on vérifie que si f a cette forme, alors on a égalité dans l'inégalité de Wirtinger.

Exercice (3). Phénomène de Gibbs

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique qui coïncide avec la fonction identité sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f.
   a) Montrer que la somme S_n possède, comme fonction de la variable $x \in [0\,;2\pi[$, $2n$ points critiques qui sont des extrema locaux si n est impair, et $2n-1$ points critiques dont $2n-2$ sont des extrema locaux si n est pair.
   Montrer aussi que le premier extrémum local de S_n est un minimum local, atteint en le point $\pi/(n+1)$.
   b) Montrer que $S_n\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi - 2\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$.
   c) Interpréter ce dernier résultat, sachant que $2\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \approx 3{,}7$.

▶ **Corrigé.–**

1. On a : $\quad a_0(f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\mathrm{d}t = 2\pi$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n(f) + \mathrm{i}b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} te^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[t\times\frac{e^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{i}n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\mathrm{i}\times n}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\times\frac{2\pi}{\mathrm{i}\times n} - 0 = -\frac{2i}{n}, \end{aligned}$$

donc $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = -2/n$.

2. a) D'après 1), on a $S_n(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(kx)}{k}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et donc

$$\begin{aligned} S_n'(x) &= -2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = -2\mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{\mathrm{i}kx}\Big) \\ &= -2\mathrm{Re}\Big(e^{\mathrm{i}x}\times\frac{1-e^{\mathrm{i}nx}}{1-e^{\mathrm{i}x}}\Big), \quad \text{pour tout } x \in]0\,;2\pi[, \\ &= -2\mathrm{Re}\Big(e^{\mathrm{i}x}\times\frac{e^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}}{e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\times\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\Big) = \frac{-2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\times\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} S_n'(x)=0 \\ \text{et } x\in[0\,;2\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)=0 \text{ ou } \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)=0 \\ \text{et } x\in]0\,;2\pi[, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad x=\frac{2k\pi}{n} \text{ (noté } x_k\text{) où } k\in\{1,2,\dots,n-1\} \\ \text{ou} \quad x=\frac{\pi}{n+1}+\frac{2k\pi}{n+1} \text{ (noté } y_k\text{) où } k\in\{0,1,\dots,n\}. \end{cases}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x\mapsto\sin(nx/2)$ s'annule au point x_k, avec $g_n'(x_k)=(n/2)\cos(k\pi)=(-1)^k n/2$: ainsi, g_k' garde un signe constant au voisinage de x_k, donc la fonction g_k s'annule en changeant de signe en x_k.
Comme par ailleurs les fonctions $x\mapsto\cos\big((n+1)x/2\big)$ et $x\mapsto\sin(nx/2)$ sont de signe constant au voisinage du point x_k, on en déduit que S_n' s'annule en changeant de signe en x_k, ce qui prouve que S_n admet un extremum local en ce point, et ce pour tout $k\in\{1,2,\dots,n\}$.
On prouve de la même façon que S_n admet un extremum local en chacun des points y_k, pour tout $k\in\{0,1,\dots,n\}$.
Enfin, $S_n'(0)=-2n<0$, $S_n'(\pi/(n+1))=0$ et S_n' est continue et ne s'annule pas sur $\big]0\,;\pi/(n+1)\big[$: on en déduit que S_n est décroissante sur $[0\,;\pi/(n+1)]$, et l'extremum local de S_n au point $y_0=\pi/(n+1)$ est donc un minimum local.

b) D'après a), pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n'(t)=\frac{-2\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)\times\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

et en utilisant la formule $\sin(a)-\sin(b)=2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on obtient, pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n'(t)=\frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)-\sin\left((n+\frac12)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=1-\frac{\sin\left((n+\frac12)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

De plus, $S_n(0)=\pi$ et S_n' est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$S_n(x) \;=\; S_n(0)+\int_0^x S_n'(t)\,\mathrm{d}t,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} S_n\left(\tfrac{\pi}{n+1}\right) &= \pi+\int_0^{\frac{\pi}{n+1}} S_n'(t)\,\mathrm{d}t=\pi+\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\left(1-\frac{\sin\left((n+\frac12)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\mathrm{d}t \\ &= \pi+\frac{\pi}{n+1}-I_n, \quad \text{avec } I_n=\int_0^{\frac{\pi}{n+1}}\frac{\sin\left((n+\frac12)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Le changement de variable $u=(n+\frac{1}{2})t$ donne

$$I_n=\int_0^{\frac{n+1/2}{n+1}\pi}\frac{\sin(u)}{(n+\frac{1}{2})\sin\left(\frac{u}{2n+1}\right)}\,\mathrm{d}u.$$

On définit alors la fonction

$$\begin{array}{rccl}\varphi_n: &]0\,;\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \begin{cases}\dfrac{\sin(u)}{(n+\frac{1}{2})\sin\left(\frac{u}{2n+1}\right)} & \text{si } u\in\left]0\,;\frac{n+1/2}{n+1}\pi\right] \\ 0 & \text{si } u\in\left]\frac{n+1/2}{n+1}\pi\,;\pi\right[.\end{cases}\end{array}.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction φ_n est continue par morceaux, et l'on a pour tout $u\in]0\,;\pi[$,

$$\varphi_n(u)\xrightarrow[n\to+\infty]{}2\frac{\sin(u)}{u}\quad\text{puisque}\ \sin\left(\frac{u}{2n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{u}{2n+1}.$$

Par ailleurs, la fonction sinus est continue sur le segment $\left[0\,;\pi/2\right]$, avec l'inégalité $\sin(x)\geqslant(2/\pi)x$, valable sur ce même segment. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $u\in]0\,;\pi[$,

$$\sin\left(\frac{u}{2n+1}\right)\geqslant\frac{2}{\pi}\times\frac{u}{2n+1}>0,\quad\text{donc } 0\leqslant\varphi_n(u)\leqslant\pi\times\frac{\sin(u)}{u}=:\varphi(u).$$

Comme la fonction φ est prolongeable par continuité sur $[0\,;\pi]$, elle est donc intégrable sur cet intervalle, et d'après le théorème de convergence dominée :

$$I_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^\pi 2\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u,\ \text{donc } S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\pi-\int_0^\pi 2\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

c) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement, et

$$S_n(0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\tfrac{1}{2}\left(f(0^+)+f(0^-)\right)=\frac{0+2\pi}{2}=\pi.$$

Si la série de Fourier de f convergeait uniformément, on aurait alors, d'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{n\to+\infty}S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}S_n(0)=\pi.$$

Or, d'après b), $\pi-S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^\pi 2\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x\approx 3,7.$

Le nombre $\displaystyle\int_0^\pi 2\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ peut donc être interprété comme « l'écart à la convergence uniforme » : c'est le phénomène de Gibbs.

Exercice (4). Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) \ : \quad y'' + y = |\sin(x)|.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$
2. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

▶ **Corrigé.**–

1. La fonction paire $x \mapsto |\sin(x)|$ est π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc sa série de Fourier converge (normalement) vers elle. On a
$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[-\cos(t)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et
$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \times \cos(2nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Big(\sin\big((2n+1)t\big) - \sin\big((2n-1)t\big)\Big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos\big((2n+1)t\big)}{2n+1} + \frac{\cos\big((2n-1)t\big)}{2n-1}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1}\Big) = \frac{-4}{\pi} \times \frac{1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$
2. L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ devient
$$y''(x) + y(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$
Cherchons une solution particulière de l'équation $z''(x) + z(x) = \cos(2nx)$ sous la forme $z_p(x) = A_n \times \cos(2nx)$. On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ z_p''(x) = -A_n \times 4n^2 \cos(2nx)$$
puis
$$\cos(2nx) = z_p''(x) + z_p(x) = A_n(1 - 4n^2)\cos(2nx),$$
d'où
$$A_n = \frac{1}{1 - 4n^2}.$$

Montrons alors que la fonction

$$y_p : \ x \mapsto \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$$

est une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

La série $\sum \dfrac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$ a pour série dérivée $\sum \dfrac{-2n}{(4n^2-1)^2} \times \sin(2nx)$, et pour série dérivée seconde $\sum \dfrac{-4n^2}{(4n^2-1)^2} \times \cos(2nx)$, qui convergent toutes trois normalement sur $\mathbb{R}$, car pour $\alpha \in \{0, 1, 2\}$,

$$\frac{n^\alpha}{(4n^2-1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{16} \times \frac{1}{n^{4-\alpha}},$$

terme général d'une série numérique manifestement convergente : la fonction y_p est ainsi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$y_p''(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{(4n^2-1)^2} \times \cos(2nx),$$

puis

$$y_p''(x) + y_p(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} = |\sin(x)|.$$

Par ailleurs, l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $y'' + y = 0$ est l'espace $\big\{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)\,; \ \ \lambda, \ \ \mu \in \mathbb{R}\big\}$. Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cdot \cos(x) + \mu \cdot \sin(x) + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2},$$

lesquelles forment donc un espace affine de dimension 2.

Exercice (5). Une caractérisation de la fonction sinus

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$; on suppose que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$.

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$c_p(f) = \frac{1}{(\mathrm{i} \times p)^k} c_p(f^{(k)}),$$
où $c_p(f)$ est le p-ième coefficient de Fourier complexe de f.
En déduire que si $|p| \geqslant 2$, alors $c_p(f) = 0$.
2. a) Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + a_1(f)\cos(x) + b_1(f)\sin(x).$$
b) Montrer que $b_1(f) = 1$ et $a_1(f) = 0$.
c) Conclure.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
$$\begin{aligned}
c_p(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{I.P.P.}}{=} \frac{1}{2\pi}\Big(\Big[\frac{-1}{\mathrm{i}\times p}e^{-\mathrm{i}pt}f(t)\Big]_0^{2\pi} + \frac{1}{\mathrm{i}\times p}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \times \frac{-1}{\mathrm{i}\times p}\big(\underbrace{f(2\pi) - f(0)}_{0}\big) + \frac{1}{\mathrm{i}\times p} \times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}\times p} c_p(f')\cdot
\end{aligned}$$
De proche en proche, on obtient
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad c_p(f) = \frac{1}{(\mathrm{i}\times p)^k} \times c_p(f^{(k)}),$$
donc pour tout p tel que $|p| \geqslant 2$:
$$\begin{aligned}
|c_p(f)| \leqslant \frac{1}{|p|^k} \times |c_p(f^{(k)})| &= \frac{1}{|p|^k \times 2\pi}\Big|\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)e^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{|p|^k \times 2\pi}\int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{|p|^k \times 2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{1}{|p|^k},
\end{aligned}$$
et comme $1/|p|^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, alors $|c_p(f)| = 0$.

2. a) La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big),$$

et l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(e^{\mathrm{i}kt} + e^{-\mathrm{i}kt})\mathrm{d}t = c_{-k}(f) + c_k(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(e^{\mathrm{i}kt} - e^{-\mathrm{i}kt})\mathrm{d}t = \mathrm{i}\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big). \end{aligned}$$

D'où, pour $k \geqslant 2$, $\;a_k(f) = b_k(f) = 0$, et donc

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + a_1(f)\cos(x) + b_1(f)\sin(x).$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -a_1(f)\sin(x) + b_1(f)\cos(x)$, d'où $1 = f'(0) = b_1(f)$, et donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= -a_1(f)\sin(x) + \cos(x) \\ &= \sqrt{1 + \big(a_1(f)\big)^2} \times \left(\frac{-a_1(f)}{\sqrt{1 + \big(a_1(f)\big)^2}}\sin(x) + \frac{1}{\sqrt{1 + \big(a_1(f)\big)^2}}\cos(x)\right). \end{aligned}$$

En posant $\theta = \arccos\left(-a_1(f)/\sqrt{1 + \big(a_1(f)\big)^2}\right)$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sqrt{1 + \big(a_1(f)\big)^2}\big(\cos(\theta)\sin(x) + \sin(\theta)\cos(x)\big), \\ &= \sqrt{1 + \big(a_1(f)\big)^2}\sin(x + \theta), \end{aligned}$$

et $\sqrt{1 + \big(a_1(f)\big)^2} = f'(\pi/2 - \theta) \leqslant 1$, donc $a_1(f) = 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0(f)/2 + \sin(x)$, d'où $a_0(f)/2 = f(0) - \sin(0)$, et donc $a_0(f) = 0$. Finalement,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x).$$

Exercice (6). Intégrale de Fresnel (via les séries de Fourier)

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi t^2}\mathrm{d}t$ sont convergentes.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 1-périodique définie par $f(x) = e^{2\mathrm{i}\pi x^2}$ sur l'intervalle $[0\,;1[$.
   a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_{2p}(f) = \displaystyle\int_{p-1}^{p} e^{2\mathrm{i}\pi t^2}\mathrm{d}t$, et en déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi t^2}\mathrm{d}t = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p}(f)$.
   b) Établir alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1/2)\big)$, puis que
$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. La fonction $t \mapsto e^{\mathrm{i}t}/\sqrt{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, et $e^{\mathrm{i}t}/\sqrt{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1/\sqrt{t}$; comme la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0\,;1]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge. De plus, pour tout $A > 1$,
$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t &= \Big[\frac{e^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}\sqrt{t}}\Big]_1^A + \frac{1}{2i}\int_1^A \frac{e^{\mathrm{i}t}}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \quad \text{(I.P.P.)}\\ &= \frac{e^{\mathrm{i}A}}{\mathrm{i}\sqrt{A}} - \frac{e^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_1^A \frac{e^{\mathrm{i}t}}{t^{3/2}}\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{-e^{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_1^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{t^{3/2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
   La dernière intégrale est bien convergente, puisque pour tout $t \geqslant 1$, on a $|e^{\mathrm{i}t}/t^{3/2}| \leqslant 1/t^{3/2}$, où la fonction $t \mapsto 1/t^{3/2}$ est intégrable sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. On en déduit dès lors que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge, et qu'il en est donc de même $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Le changement de variable $t = \sqrt{u/(2\pi)}$ donne par ailleurs
$$\int_0^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{\mathrm{i}u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u,$$
   et comme $t \mapsto e^{2\mathrm{i}\pi t^2}$ est paire, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi t^2}\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.

2. a) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_{2p}(f) &= \int_0^1 f(t)e^{-4\mathrm{i}\pi pt}\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{2\mathrm{i}\pi(t^2-2pt)}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 e^{2\mathrm{i}\pi\left((t-p)^2-p^2\right)}\mathrm{d}t = \underbrace{e^{-2\mathrm{i}\pi p^2}}_{=1}\int_0^1 e^{2\mathrm{i}\pi(t-p)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 e^{2\mathrm{i}\pi(t-p)^2}\mathrm{d}t = \int_{p-1}^{p+1} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u, \quad \text{avec } u = p-t. \end{aligned}$$

Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u$ converge, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u = \lim_{\substack{N\to+\infty\\ M\to+\infty}} \int_{-M}^{N} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u = \lim_{\substack{N\to+\infty\\ M\to+\infty}} \sum_{p=-M+1}^{N} \int_{p-1}^{p} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u,$$

donc la série $\displaystyle\sum \int_{p-1}^{p} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u$ converge, et :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \int_{p-1}^{p} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u \iff \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u.$$

b) Il est facile de voir que f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et comme elle est 1-périodique, alors d'après le théorème de Dirichlet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)e^{2\mathrm{i}\pi px}$, d'où

$$1 = f(0) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f), \text{ et } i = f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)e^{\mathrm{i}p\pi} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p c_p(f),$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1+\mathrm{i}}{2} &= \frac{f(0)+f(1/2)}{2} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\times\left(1+(-1)^p\right) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p}(f) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u \\ &= 2\left(\int_0^{+\infty}\cos(2\pi u^2)\mathrm{d}u + \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\sin(2\pi u^2)\mathrm{d}u\right), \end{aligned}$$

de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(2\pi u^2)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\sin(2\pi u^2)\mathrm{d}u = 1/4$. Le changement de variable $t = \sqrt{2\pi}u$ donne finalement :

$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\cdot$$

Exercice (7). Équation de la chaleur. La température d'une barre métallique de longueur π, maintenue à ses extrémités à la température 0 est une fonction $g : [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue et vérifiant les conditions suivantes.

(a). Pour tout $x \in [0\,;\pi]$: $g(x,0) = f(x)$, où $f : [0\,;\pi] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

(b). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(0,t) = g(\pi,t) = 0$.

(c). Les fonctions $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ existent et sont continues sur le produit $[0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$, telles que $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$.

Le but de cet exercice est de montrer l'existence et l'unicité d'une telle fonction g.

1. Montrer que si une telle fonction g existe, alors il existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{R})$ telle que

   ▷ $\forall (x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+, \quad g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(t)\sin(nx)$

   ▷ $\forall (t,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*, \quad B_n'(t) = -n^2 B_n(t)$.

   En déduire que, pour tout $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+$,
$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx), \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

2. Montrer que la fonction ainsi construite répond à la question.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction impaire $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, qui est 2π-périodique et définie sur $[0\,;\pi]$ par $g_t(x) = g(x,t)$. Il est facile de voir que g_t est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (même de classe $\mathcal{C}^1$), et comme elle est 2π-périodique alors sa série de Fourier converge normalement vers elle. Comme g_t est impaire, alors $a_n(g_t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en notant $B_n(t) = b_n(g_t)$, on a pour tout $x \in [0\,;\pi]$,
$$g_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(t)\sin(nx)$$
$$\text{et} \quad B_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_t(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x\cdot$$

Ensuite, la fonction $(x,t)\mapsto g(x,t)\sin(nx)$ est continue sur $[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction B_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus, la fonction $(x,t)\mapsto \partial g/\partial t(x,t)\sin(nx)$ est continue sur le produit $[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction B_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t>0$,

$$B_n'(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x \overset{(c)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

En utilisant deux intégrations par parties consécutives, on a alors, pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned}
B_n'(t)&=\frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\sin(nx)\Big]_0^\pi}_{=0}-n\int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\cos(nx)\mathrm{d}x\Big)\\
&=-\frac{2n}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\cos(nx)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{2n}{\pi}\Big(\underbrace{\big[g(x,t)\cos(nx)\big]_0^\pi}_{=0 \text{ par (a)}}+n\int_0^\pi g(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x\Big)\\
&=-\frac{2n^2}{\pi}\int_0^\pi g(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x=-n^2B_n(t),
\end{aligned}$$

et par conséquent $B_n(t)=b_ne^{-n^2t}$, avec

$$b_n=B_n(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x,0)\sin(nx)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x,$$

et $g(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_ne^{-n^2t}\sin(nx)$ pour tout $(x,t)\in[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, et même pour tout $(x,t)\in[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+$, car

$$g(x,0)=g_0(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(g_0)\sin(nx),\quad \text{où } b_n(g_0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=b_n.$$

On a donc obtenu une unique expression possible pour une fonction solution du problème.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, avec $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$, on définit la fonction

$$\begin{aligned}h_n\,:\,[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}\\ (x,t)&\mapsto b_ne^{-n^2t}\sin(nx).\end{aligned}$$

Elle est continue, et l'on a pour tout $(x,t)\in[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+$, $|h_n(x,t)|\leqslant|b_n|$.

La fonction impaire $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0\,;\pi]$ est (facilement vérifiable) de classe $\mathcal{C}^1$, donc

$$b_n(\widetilde{f}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = b_n,$$

Ainsi, $b_n = b_n(\widetilde{f}) = a_n(\widetilde{f}')/n$.

Or, d'après la formule de Parseval, la série $\sum_{n\geqslant 1}\big(a_n(\widetilde{f}')\big)^2$ converge, et comme

$$|b_n| = \Big|\frac{1}{n}a_n(\widetilde{f}')\Big| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + \big(a_n(\widetilde{f}')\big)^2\Big),$$

alors la série $\sum_{n\geqslant 1}|b_n|$ converge. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge normalement sur $[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+$, et la fonction

$$\begin{array}{rccl} g : & [0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x,t) \end{array}$$

est continue sur $[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $a>0$ et tout $t\in[a\,;+\infty[$,

$$\Big|\frac{\partial h_n}{\partial t}(x,t)\Big| \leqslant n^2|b_n|e^{-n^2a},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1}\partial h_n/\partial t$ converge normalement, donc uniformément sur le produit $[0\,;\pi]\times[a\,;+\infty[$. Par conséquent, $\partial g/\partial t$ est bien définie et continue, avec

$$\forall (x,t)\in[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+^*,\qquad \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 b_n e^{-n^2t}\sin(nx)\cdot$$

On montre de même que $\partial g/\partial x$ et $\partial^2 g/\partial x^2$ sont bien définies et continues sur $[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, avec pour tout couple $(x,t)\in[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n e^{-n^2t}\cos(nx) \quad\text{et}\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 b_n e^{-n^2t}\sin(nx).$$

Ainsi, pour tout couple $(x,t)\in[0\,;\pi]\times\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t),$$

ce qui prouve que la fonction g est solution de l'équation de la chaleur. Le raisonnement mené à la question précédente garantit ainsi l'unicité de cette solution.

Commentaires sur les exercices de cette leçon

Exercice 1.– Cet exercice est décomposé en deux parties, où l'on prolonge une fonction définie a priori seulement sur $[0\,;\pi]$, à partir de laquelle on obtient des sommes de séries trigonométriques à l'aide de fonctions cosinus seulement, ou sinus seulement en la prolongeant alternativement en une fonction 2π-périodique paire, puis impaire. On rencontrera ensuite la formule de Parseval.

Exercice 2.– On établi ici l'inégalité de Wirtinger, classique et importante : on utilise à cet effet les relations entre les coefficients de Fourier d'une fonction, et ceux de sa dérivée.

Exercice 3.– Un exercice très important et classique qui pourrait figurer dans la leçon 410, où l'on présente un exemple de convergence simple, non uniforme de la série de Fourier pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, non continue. On mesure l'écart à la convergence uniforme dans ce cas particulier.

Exercice 4.– On utilise dans cet exercice les séries de Fourier pour résoudre une équation différentielle linéaire. Un énoncé assez classique pour ce type de situation.

Exercice 5.– Un résultat connu mais très difficile à démontrer sans l'hypothèse supplémentaire de 2π-périodicité, rajoutée ici pour que l'exercice puisse être présenté dans le temps imparti à l'oral de l'agrégation interne. On y utilise des séries de Fourier, et les relations entre les coefficients de Fourier d'une fonction et de ses dérivées successives.

Exercice 6.– L'intégrale de Fresnel est un grand classique ; on en donne ici une démonstration technique mais condensée, via le théorème de Dirichlet.

Exercice 7.– Une résolution d'une célèbre et incontournable équation aux dérivées partielles, via les séries de Fourier.