Université Grenoble Alpes | **Année 2023-2024**
UFR IM^{2}AG | **Agrégation Interne Mathématiques**

Feuille d'exercices

"Topologie des espaces métriques et des e.v.n."

L'objectif de cette feuille d'exercices est de revoir les principales notions de topologie des espaces métriques et des espaces vectoriels normés : distances et normes équivalentes, ouverts, fermés, compacts, continuité. Même si une grande partie du programme porte sur les espaces vectoriels normés de dimension finie, il est important de considérer aussi les espaces de dimension infinie, notamment les espaces de suites ou de fonctions qui permettent d'illustrer les subtilités de la dimension infinie (et de la dimension finie). De même, les espaces métriques, dans lesquels peuvent ête énoncés les théorèmes de point fixe, sont un cadre naturel pour définir de manière assez intuitive les principales notions de topologie ; ils méritent donc aussi notre attention.

Les leçons d'oral associées à ces notions sont les suivantes :

221. Parties compactes de $\mathbb{R}^n$. Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.

224. Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.

225. Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.

226. Suites dans un espace vectoriel normé.

227. Théorèmes de points fixes.

I. Espaces métriques

Quelques résultats généraux

Exercice 1. Soient (X,d) et (X',d') des espaces métriques. Les applications

$$((x,x'),(y,y')) \in (X\times X')^2 \longmapsto \begin{cases} \max\left(d(x,y),d'(x',y')\right) \\ d(x,y)+d'(x',y') \\ \sqrt{d(x,y)^2+d'(x',y')^2} \end{cases}$$

sont des distances équivalentes sur $X\times X'$.

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que $f(0)=0$ et, pour tous $s,t\in\mathbb{R}^+$, $f(s+t)\le f(s)+f(t)$.

1. On suppose qu'il existe $s>0$ tel que $f(s)=0$. Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}^+$.
2. On suppose que f n'est pas nulle. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que l'application
$$d_f:(x,y)\in X\times X\longmapsto f(d(x,y))$$
est une distance sur X.
3. Donner des exemples d'applications vérifiant les hypothèses faites sur f.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique, $A, B \subset X$ deux compacts disjoints.

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a \in A$ et $b \in B$ on ait : $d(a, b) \geq \varepsilon$.
2. Montrer que cela est faux si on suppose seulement A et B fermés.
3. Qu'en est-il si on suppose A compact et B fermé ?

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique, $A, B \subset X$ deux compacts.

1. Rappeler la définition de la distance entre A et B, notée $d(A, B)$.
2. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(A, B) = d(a, b)$. On dit alors que $d(A, B)$ est atteinte.
3. Montrer que si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé de dimension finie, $F \subset X$ est fermé et $K \subset X$ est compact, non vides, alors $d(F, K)$ est atteinte.
4. Soit $l^\infty(\mathbb{N})$ l'e.v.n. des suites réelles bornées, muni de la norme uniforme :
$$\forall x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ N_\infty(x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|.$$
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note x^n la suite $(x^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} x^n_k &= 1 + \dfrac{1}{k+1} \text{ si } k \leq n, \\ \\ x^n_k &= 0 \text{ si } k > n. \end{cases}$$
   4.a. Ecrire explicitement les trois premiers éléments $x^0,\ x^1,\ x^2$.
   4.b. Montrer que $F := \{x^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fermé.
   4.c. Calculer $d(0, F)$ où 0 est la suite nulle.
   4.d. La distance $d(0, F)$ est-elle atteinte ? Que peut-on en conclure ?
5. Montrer que $l^\infty(\mathbb{N})$ est complet et qu'il en est de même de $c_0 = \{x \in l^\infty(\mathbb{N}) /\ \lim_{k\to+\infty} x_k = 0\}$ muni de la norme uniforme.
6. Qu'en est-il de $c_{00} = \{x \in l^\infty(\mathbb{N}) /\ \exists k_0 \in \mathbb{N},\ x_k = 0, \forall k \geq k_0\}$ muni de la norme uniforme ?

Exercice 5. On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles.

1. On pose
$$\forall f, g \in E,\ d(f, g) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \min\left(1, \sup_{x\in[-n,n]} |f(x) - g(x)|\right).$$
   Montrer que d est une métrique et que la convergence pour d équivaut à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $f \in E \setminus \{0\}$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(\lambda f, 0) < \varepsilon$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de norme sur E telle que la convergence pour cette norme soit équivalente à la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Applications continues - Théorèmes du point fixe

Exercice 6. Soient X un espace métrique compact non vide, Y un espace métrique et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ une application continue. Démontrer que l'application $y \in Y \mapsto \sup\{f(x,y),\ x \in X\}$ est continue de Y dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soient (X,d) un espace métrique complet non vide et $f : X \to X$ une application lipschitzienne de rapport $k \in [0,1[$ (f est dite contractante). Pour $r \in \mathbb{R}^+$, on pose $A_r = \{x \in X/\ d(x,f(x)) \leq r\}$.

1. Montrer que $f(A_r) \subset A_{kr}$ et en déduire que pour tout $r \in R^{+*}$, A_r est une partie fermée non vide de X.
2. Soient $x, y \in A_r$. Montrer que $d(x,y) \leq 2r + d(f(x), f(y))$ et en déduire que $\delta(A_r) \leq \frac{2r}{1-k}$
3. Montrer que A_0 n'est pas vide.
4. Énoncer le théorème démontré.

Exercice 8. (Théorème du point fixe à paramètres). Soient X un espace métrique, (Y,d) un espace métrique complet non vide et $f : X \times Y \to Y$ une application telle que :
- pour tout $y \in Y$, l'application $x \mapsto f(x,y)$ est continue sur X ;
- pour tout $x \in X$, il existe un voisinage V de x et un nombre réel k tels que $0 \leq k < 1$ et, pour tout $(x', y, y') \in V \times Y \times Y$, on ait $d(f(x',y), f(x',y')) \leq kd(y,y')$.

1. Montrer que l'application f est continue.
2. Montrer qu'il existe une unique application $g : X \to Y$ telle que, pour tout $x \in X$, on ait $f(x, g(x)) = g(x)$.
3. Montrer que l'application g est continue.

II. Espaces vectoriels normés

Normes équivalentes.

Exercice 9. Montrer que sur un $\mathbb{R}$- e.v.n. de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

Exercice 10. Montrer que l'application $A \mapsto \left(tr({}^tA.A)\right)^{1/2}$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et qu'elle vérifie : $\forall A,\ B \in M_n(\mathbb{R}),\ \|AB\| \leq \|A\|\ \|B\|$.

Exercice 11. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{et} \quad N_\infty(P) = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

1. a. Démontrez que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
   b. Démontrez que tout ouvert pour N_∞ est un ouvert pour N_1.
   c. Démontrez que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
2. On note N_1' et N_∞' les restrictions des normes à $\mathbb{R}_k[X]$. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 12. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On définit l'application

$$P \in E \mapsto \|P\| := \sup_{x\in[0,1]} |P(x) - P'(x)|.$$

Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

Exercice 13. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On pose pour $f \in E$, $N_\infty(f) = sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$.

1. a. Démontrez que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.
   b. Démontrez qu'il existe $k > 0$ tel que $N_1 \leq kN_\infty$.
   c. Démontrez que tout ouvert pour N_1 est un ouvert pour N_∞.
2. Démontrez que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 14. Pour $f \in E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, soit $N(f) = sup\left\{\left|\int_0^1 t^n f(t)dt\right|,\ n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 15. Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée et telle que $u_0 = 0\}$.
On définit $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ et $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1. Montrer que N_∞ et N sont deux normes sur E.
2. Montrer que N$\leq 2N_\infty$ et que la majoration est optimale.
3. Montrer que les deux normes ne sont pas équivalentes.

Topologie des e.v.n.

Exercice 16. Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. Démontrez que $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.
2. Démontrez que si A est un sous-espace vectoriel de E, il en est de même de $\overline{A}$.
3. Démontrez que si A est convexe, il en est de même de $\overline{A}$.

Exercice 17. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset F$. Montrer que $E = F$.
2. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. On suppose que F est un hyperplan de E. Montrer l'alternative : F est fermé ou F est dense dans E. Trouver des exemples illustrant chacun des deux cas.
4. On suppose que F est de dimension finie. Montrer que F est fermé.

Exercice 18. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le sous-ensemble des matrices symétriques (puis antisymétriques) de E est une partie fermée de E.
2. Soit B une matrice antisymétrique. On suppose que la suite $(B^n)_n$ converge vers une matrice C. Que peut-on dire de la matrice C ?

Exercice 19. On note F l'ensemble des triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admette deux solutions réelles distinctes. Montrer que F est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 20. Rappeler et démontrer le théorème de Riesz caractérisant les espaces vectoriels normés de dimension finie.

Applications linéaires continues

Exercice 21. Soit $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. On définit $T : E \to E$ par

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que T est bien défini, linéaire continu, et calculer $|||T|||$.
2. Montrer que,
$$\forall f \in E,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |T^n(f)(x)| \leq \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty.$$
En déduire la valeur de $|||T^n|||$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda Id - T$ est inversible, et que $|||(\lambda Id - T)^{-1}||| \leq \frac{1}{|\lambda|}e^{1/|\lambda|}$.
Que peut-on dire pour $\lambda = 0$?

Exercice 22. On pose $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On définit

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & E & \to & \mathbb{R} \\ & & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)dt. \end{array}$$

1. Montrer Φ est bien définie et continue.
2. On pose $F = \{f \in E /\ \|f\|_\infty \leq 2,\ f(0) = 1\}$. Montrer que F est fermé et borné.
3. Montrer que F n'est pas compact.
4. L'ensemble $\{\Phi(f),\ f \in F\}$ admet-il une borne inférieure ?

Exercice 23. Soit $l^\infty(\mathbb{N}^*)$ l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme uniforme. On considère $T : l^\infty(\mathbb{N}^*) \to l^\infty(\mathbb{N}^*)$ défini par :

$$\forall x \in l^\infty(\mathbb{N}^*),\ T(x) = (x_1, x_2/2, \dots) = (x_n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

1. Montrer que T est bien défini, et linéaire continu avec $|||T||| = 1$.

2. Montrer que T est injectif, mais non surjectif.

Exercice 24. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn et $(F, \|\cdot\|_F)$ un espace de Banach (i.e. un evn complet). Montrer que l'espace $C_b^0(E, F) := \{f : E \to F \text{ continue et bornée}\}$, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \|f(x)\|_F,$$

est un espace de Banach.

Remarques. 1. Il en est de même de $(l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$, $\mathcal{L}_c(E, F)$ avec $(E, \|\cdot\|_E)$ un evn et $(F, \|\cdot\|_F)$ espace de Banach.

2. Qu'en est-il de l'espace vectoriel $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites nulles à partir d'un certain rang, muni de $\|\cdot\|_p$? On pourra considérer la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'élements de $c_0(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x^k = \left(\frac{1_{[0,k]}(n)}{(n+1)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$