Université Grenoble Alpes | **Année 2023-2024**
UFR IM^{2}AG | **Agrégation Interne Mathématiques**

Feuille d'exercices
"Équations différentielles"

Dans cette feuille d'exercices, nous abordons certaines notions au programme de l'agrégation interne de mathématiques, notamment : le théorème de Cauchy-Lipschitz (dont nous proposons deux versions), le lemme de Grönwall (qui permet notamment d'étudier le comportement en "grand temps" d'une solution). Nous étudions aussi des exemples de résolution d'équations différentielles.

Les leçons d'oral associées sont les suivantes :

217. équations différentielles linéaires d'ordre deux : $x'' + ax' + bx = c$, où a, b, c sont des fonctions continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

218. Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coeffcients constants. Exemples.

219. Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.

I. Théorèmes de Cauchy-Lipschitz

1. Théorème de Cauchy-Lipschitz global. Il repose sur le caractère contractant d'une certain fonctionnelle, à laquelle on pourra appliquer le théorème du point fixe (sur un compact), en considérant une exhaustion de l'intervalle I par une union croissante d'intervalles compacts.

Théorème 1. *Soient $\mathbb{R}^m$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue, supposée globalement lipschitzienne en x au sens suivant : pour tout compact $K \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $t \in K$, $x, y \in \mathbb{R}^m$:*

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Alors, pour tous $t_0 \in I$ et $x_0 \in \mathbb{R}^m$, le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{1}$$

admet une unique solution globale (i.e. définie sur I tout entier).

Exemple. Montrer que la fonction $t \in [0,1[\mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est solution du problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x^2 \\ x(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

Que peut-on en déduire ?

Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz global

Soit F l'application définie par

$$\begin{array}{rcccl} F & : & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^m) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^m) \\ & & x & \mapsto & F(x) : t \in I \mapsto x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^t f(s,x(s))ds. \end{array}$$

1. Montrer que x est solution de (1) si et seulement si x est point fixe de F. Quelles hypothèses sur f a-t-on utilisées ?

2. On suppose l'intervalle I compact.
   Soit $\|\cdot\|_k$ l'application définie sur $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^m)$ par $\|x\|_k := \max_{t\in I}\left(e^{-k|t-t_0|}\|y(t)\|\right)$.
   (a) Montrer que $\|\cdot\|_k$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
   (b) Que peut-on en déduire pour l'e.v.n. $(\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^m),\|\cdot\|_k)$?
   (c) Montrer que l'application F est contractante pour $\|\cdot\|_k$.
   (d) En déduire que (1) admet une unique solution sur I.
3. Montrer qu'il existe une suite croissante d'intervalles compacts $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que t_0 appartient à I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $I=\cup_{n\in\mathbb{N}}I_n$.
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note x_n l'unique solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t,x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}.$$

   Montrer que l'application x définie par $x_{|I_n}=x_n$ pour tout $n\geq 0$ est bien définie sur I et est l'unique solution au problème de Cauchy (1) sur I.

2. Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Théorème 2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A: I\to M_n(\mathbb{R})$ une application continue, $B: I\to\mathbb{R}^n$ une application continue. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)X(t)+B(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{cases} \tag{2}$$

admet une unique solution sur I.
L'ensemble des solutions de $X'=AX+B$ est un espace affine de dimension n.

Démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

1. Peut-on appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz global ?
2. On suppose $I=[a,b]$. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$, $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$ de la norme de la convergence uniforme et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle habituelle.
   Soit F l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^m) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \\ & & x & \mapsto & F(x): t\in I\mapsto x_0+\displaystyle\int_{t_0}^t f(s,x(s))ds. \end{array}$$

   (a) Montrer que $M:=\sup_{t\in[a,b]}\|A(t)\|$ est bien défini.
   (b) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, pour tout $t\in[a,b]$ et pour tout $X,Y\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}^n)$:

$$\|F^k(X)(t)-F^k(Y)(t)\|\leq\frac{|t-t_0|^kM^k}{k!}\|X-Y\|_\infty.$$

   (c) En déduire qu'il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que F^k soit contractante.
   (d) En déduire que le problème de Cauchy (2) admet une unique solution sur $[a,b]$
3. Montrer que le problème de Cauchy (2) admet une unique solution sur I.

Exercice 1 Equation linéaire du premier ordre avec second membre

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant, cas particulier du théorème 2 mais pour lequel une forme explicite de l'unique solution peut être donnée :

Théorème "scalaire". *Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, A une primitive de a sur I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution sur I de l'équation $y' + ay = b$ telle que $y(x_0) = y_0$; elle est définie par :*

$$\forall x \in I,\ y(x) = y_0 e^{A(x_0)-A(x)} + \int_{x_0}^{x} b(t) e^{A(t)-A(x)} dt.$$

1. **Méthode de la variation de la constante.** On cherche une solution particulière $\tilde{y}$ de l'équation avec second membre $y' + ay = b$ de la forme $\tilde{y} = \lambda e^{-A}$ où λ est une fonction dérivable sur I.
   1.a. Que vaut λ' ?
   1.b. Déterminer l'ensemble des fonctions λ dérivables sur I telles que $\tilde{y}$ vérifie $\tilde{y}' + a\tilde{y} = b$ sur I.
   1.c. Déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables sur I vérifiant $y' + ay = b$ sur I. Quelle structure possède cet ensemble ?
2. Conclure la démonstration du théorème.

Exercice 2 Lemme de Grönwall

1. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$. Soit G une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b[$ et vérifiant l'inégalité :
$$\forall t \in [a, b[,\ G'(t) \leq f(t)G(t).$$
Montrer :
$$\forall t \in [a, b[,\ G(t) \leq G(a) \exp\left(\int_a^t f(s) ds\right).$$
2. Soient f et y deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ et soit $C \in \mathbb{R}$. On suppose que la fonction f est positive sur $[a, b[$. Montrer le **Lemme de Grönwall** :
$$\forall t \in [a, b[,\ y(t) \leq C + \int_a^t f(s)y(s) ds \quad \Rightarrow \quad \forall t \in [a, b[,\ y(t) \leq C \exp\left(\int_a^t f(s) ds\right).$$
Indication. On pourra considérer la fonction $G : t \in [a, b[\mapsto C + \int_a^t f(s)y(s) ds$.
3. Soient A et B deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, soit $t_0 \in I$ et soit $y_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème de Cauchy suivant défini sur I :
$$\begin{cases} y' = Ay + B, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$
Montrer que le problème admet au plus une solution sur I. Admet-il toujours une solution ?
4. Soit $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :
$$\exists \alpha > 0 / \ \forall t \in [a, b],\ |y'(t)| \leq \alpha |y(t)|.$$
Montrer :
$$\forall t \in [a, b],\ |y(t)| \leq |y(a)| e^{\alpha(t-a)}.$$
5. Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ et b une fonction continue sur $[a, b]$. Soit G une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b[$ et vérifiant l'inégalité :
$$\forall t \in [a, b[,\ G'(t) \leq f(t)G(t) + b(t).$$
Donner une inégalité vérifiée par G.

Exercice 3 Soient $A : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues telles que

$$\int_0^{+\infty} |||A(t)|||dt < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} ||p(t)||dt < +\infty.$$

Démontrer que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$x'(t) = A(t)x(t) + p(t)$$

sont définies sur $\mathbb{R}^+$ et sont bornées sur $\mathbb{R}^+$. (On pourra utiliser la question 5 de l'exercice sur le lemme de Grönwall.)

II. Quelques exemples d'équations différentielles

Exercice 4 On considère sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y' - xy = 0. \tag{3}$$

1. Que peut-on dire d'une solution y de (5) qui s'annule en un point $x_0 \in I$?
2. Quelles sont les solutions de (5) définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5

1. Déterminer l'ensemble des fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant pour tout réel x :

$$f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Exercice 6 Soient a et b deux fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -x''(t) + a(t)x(t) = b(t) \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

1. Peut-on appliquer les théorèmes du cours pour assurer l'existence de solutions au problème (4) ?
2. Montrer que les deux problèmes suivants admettent chacun une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$:

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -x''(t) + a(t)x(t) = 0 \\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -x''(t) + a(t)x(t) = b(t) \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

   On notera respectivement y et z ces solutions.
3. Montrer que x est solution de (4) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y + z$ et $\lambda y(1) + z(1) = 0$.
4. En déduire que si le problème homogène

$$\begin{cases} \forall t \in [0,1],\ -x''(t) + a(t)x(t) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

   admet une unique solution, alors il en est de même pour (4).
5. Montrer que si $a(t) \geq 0$ pour tout t, (4) admet une unique solution.

Exercice 7 Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+y \\ y' & = & 2y. \end{array}\right.$$

Que peut-on dire des trajectoires dans l'espace de configuration de coordonnées (x, y) ? Le point fixe O est-il attractif ou répulsif ?

Exercice 8 Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 4x+3y \\ y' & = & -2x-3y. \end{array}\right.$$

Que peut-on dire des trajectoires dans l'espace de configuration ?

Exercice 9 Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -y \\ y' & = & x. \end{array}\right.$$

Que peut-on dire des trajectoires dans l'espace de configuration ?

Exercice 10 Résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x-5y \\ y' & = & 5x-y. \end{array}\right.$$

Montrer que les trajectoires sont des spirales convergeant vers l'origine.
Le point fixe (l'origine) est dit *stable et attracteur, il s'agit d'un puits.*

Exercice 11 Soient a, b, c et d des fonctions continues sur I. On suppose que a ne s'annule pas sur I. Soient x_1 et x_2 deux solutions de l'équation homogène $ax'' + bx' + cx = 0$. On considère le wronskien de x_1 et x_2, noté $W(x_1; x_2)$ et défini par :

$$\forall t \in I,\ W(x_1; x_2)(t) = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t).$$

1. Déterminer une équation différentielle satisfaite par le wronskien.
2. Démontrer que la famille $(x_1; x_2)$ est une base de l'espace des solutions de l'équation homogène si et seulement si il existe un point t_0 tel que le wronskien $W(x_1; x_2)(t_0)$ est non nul (il ne s'annule alors jamais sur I).
3. Soit $(x_1; x_2)$ un système fondamental (i.e. une base) de solutions sur I de l'équation homogène $ax''+bx'+cx = 0$ (où a ne s'annule pas sur I). Montrer que si c_1 et c_2 sont 2 fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} c_1'x_1 + c_2'x_2 & = & 0 \\ c_1'x_1' + c_2'x_2' & = & \dfrac{d}{a} \end{array}\right.$$

alors la fonction $c_1x_1 + c_2x_2$, est solution de l'équation avec second membre $ax'' + bx' + cx = d$.

Exercice 12

1. Trouver la solution générale de l'équation

$$y' = e^y \sin x. \tag{5}$$

2. Expliciter la solution de (5) satisfaisant la condition initiale $y(0) = -\ln 3$. Déterminer le domaine naturel de définition de cette solution.
3. Mêmes questions pour la condition $y(0) = 0$.

Exercice 13

1. Equation de Bernoulli.
   (a) Montrer que l'équation de Bernoulli
   $$y' + a(x)y + b(x)y^n = 0,\ n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0, 1$$
   se ramène à une équation linéaire par le changement de fonction $z(x) = 1/y(x)^{n-1}$.
2. Equation de Riccati.
   (a) Montrer que si y_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati
   $$y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$$
   alors la fonction définie par $u(x) = y(x) - y_0(x)$ vérifie une équation de Bernoulli.
   (b) Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ en vérifiant d'abord que $y_0(x) = 1/x$ est une solution de l'équation.

III. Solutions d'équations différentielles linéaires développables en séries entières

Exercice 14 L'équation de Weber . Soit k un nombre réel arbitraire. Montrer que l'équation différentielle
$$y''(x) - xy'(x) + ky(x) = 0$$
possède une solution $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est développable en série entière à l'origine avec rayon de convergence infini, et qui satisfait $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

Exercice 15 L'équation de Legendre. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle
$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \lambda y(x) = 0. \qquad (6)$$

1. Soit $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que φ est solution de (6) si, et seulement si, les coefficients a_n vérifient des relations de récurrence que l'on précisera.
2. On suppose que $\lambda \notin \mathbb{N}$. Soit $\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ qui est solution de (6). En supposant $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$, déterminer R.
3. On suppose que $\lambda = l(l + 1)$ où $\in \mathbb{N}$.
   (a) On suppose l pair. Montrer que (6) possède une solution polynomiale φ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.
   (b) On suppose l impair. Montrer que (6) possède une solution polynomiale φ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$.

Exercice 16 L'équation d'Airy. On considère l'équation différentielle $y'' - xy = 0$.
Déterminer deux solutions de l'équation d'Airy, linéairement indépendantes, définies sur $\mathbb{R}$. Etudier le comportement à l'infini des 2 solutions.