Chapitre V

Exemples d'études de fonctions définies par une série (Leçon 411)

Exercice (1). Théorème de Bohr-Mollerup

1. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ainsi que, pour $x > 0$, la série $\sum \left(x/k - \ln(1 + x/k)\right)$.
   En déduire que la suite $\left(\frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{x/k}}{1 + x/k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, où $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln(n)\right)$.
2. On définit alors la fonction Gamma en posant

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} e^{-\gamma x} \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \frac{x}{k}}, \end{array}$$

   où $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{x/k}}{1 + x/k} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{x/k}}{1 + x/k}$, par définition.

   a) Montrer que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$, pour tout $x > 0$.

   b) Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$, et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left(\ln(\Gamma)\right)''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x + k)^2},$$

   et que $\left(\ln(\Gamma)\right)''(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\ln(f)$ soit une fonction convexe et vérifie $f(1)=1$ et $f(x+1)=xf(x)$ pour tout $x>0$. Montrer que la fonction

$$S : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(\dfrac{f(x)}{\Gamma(x)}\right) \end{array}$$

est 1-périodique et convexe, et en déduire que $f=\Gamma$.

▶ **Corrigé.**–

1. On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)-\ln(n)$. Alors, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1}-\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right)=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \leqslant 0, \end{aligned}$$

et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\ln(k+1)-\ln(k)\right)=\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k}-\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right) \\ &= \frac{1}{n}+\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{n}>0. \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive, que l'on note $\gamma=\lim_{n\to+\infty}u_n$.
On remarque aussi que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_n=1+\sum_{k=1}^n\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t\leqslant 1,\quad \text{donc } \gamma\in[0\,;1].$$

Puis, pour $x>0$,

$$\frac{x}{k}-\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)=\frac{x}{k}-\left(\frac{x}{k}-\frac{x^2}{2k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{x}{2k^2}.$$

Comme la série $\sum 1/k^2$ converge, alors la série $\sum(x/k-\ln(1+x/k))$ converge aussi, ce qui signifie que la suite $\left(\sum_{k=1}^n(x/k-\ln(1+x/k))\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On en déduit que la suite de terme général

$$\exp\left(\sum_{k=1}^n\left(\frac{x}{k}-\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right)=\prod_{k=1}^n\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}$$

converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, et qu'il en est de même de la suite

$$\left(\frac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{k}}}{1+\frac{x}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*},$$

donnée par l'énoncé.

2. a) On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $\Gamma_n(x) = \dfrac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\dfrac{e^{x/k}}{1+x/k}$.

   D'après 1, $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{+\infty}\dfrac{e^{x/k}}{1+x/k}$, et

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_n(x+1)}{\Gamma_n(x)} &= \frac{x}{x+1}e^{-\gamma}\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}\times\frac{k+x}{k+1+x}\\ &= \frac{x}{x+1}e^{-\gamma}\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{k}}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{k+x}{k+1+x}\\ &= \frac{x}{x+1}\times e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma}\times\frac{x+1}{x+n} = \frac{x}{x+n}\times e^{\ln(n)+o(1)}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} x\times\frac{1}{n}e^{\ln(n)+o(1)} = x\times e^{o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x,\end{aligned}$$

   de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

   b) La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Gamma_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et donc

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \ln\big(\Gamma(x)\big) &= \lim_{n\to+\infty}\ln\big(\Gamma_n(x)\big)\\ &= -\ln(x)-\gamma x+\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{x}{k}-\ln\Big(1+\frac{x}{k}\Big)\Big)\\ &= -\ln(x)-\gamma x-\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\end{aligned}$$

   avec $u_k(x) = x/k - \ln(1+x/k)$. Or, $u_k'(x) = 1/k - 1/(k+x)$, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, et $u_k''(x) = 1/(k+x)^2$. Pour $x > 0$,

$$u_k'(x) = \frac{x}{k(k+1)} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2},$$

   terme général d'une série convergente. De plus, $\|u_k''\|_{\mathbb{R}_+^*} \leqslant 1/k^2$, et la série $1/k^2$ converge : on en déduit que $\sum u_k''$ est normalement, et donc uniformément convergente, sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Les séries $\sum u_k'$ et $\sum u_k$ sont aussi uniformément convergentes sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\ln\circ\Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad \big(\ln\circ\Gamma\big)''(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+x)^2},$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n''(x)$.
Comme $\ln\left(\Gamma(x)\right) = -\ln(x) - \gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$, \left(\ln(\Gamma)\right)''(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n''(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

Mais alors, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > A$,

$$\left(\ln(\Gamma)\right)''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(A+k)^2}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(\lfloor A \rfloor + k)^2} = \sum_{k=\lfloor A \rfloor}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0,$$

donc $\left(\ln(\Gamma)\right)''(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$S(x+1) = \ln\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right) = \ln\left(\frac{xf(x)}{x\Gamma(x)}\right) = \ln\left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right) = S(x),$$

et S est donc 1-périodique. On en déduit que S', puis S'' sont 1-périodiques aussi, de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S''(x) = \left(\ln(f)\right)''(x) - \left(\ln(\Gamma)\right)''(x) = \left(\ln(f)\right)''(x) - \left(\ln(\Gamma)\right)''(x).$$

Comme $\left(\ln(\Gamma)\right)''(x+n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors

$$S''(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\ln(f)\right)''(x+n) \geqslant 0, \quad \text{car } \ln(f) \text{ est convexe.}$$

On en déduit que S est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
Mais comme S' est 1-périodique, on a $0 = S'(2) - S'(1) = \displaystyle\int_1^2 S''(t)\mathrm{d}t$,
et puisque S'' est continue et positive, alors $S''(t) = 0$ pour tout $t \in [1\,;2]$.
Enfin, puisque S'' est 1-périodique, alors $S''(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit donc que S' est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+^*$;
comme S est une fonction 1-périodique, alors S' ne peut être que la fonction nulle, et S est donc elle-même constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Dès lors, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $S(x) = S(1) = \ln\left(f(1)/\Gamma(1)\right) = \ln(1) = 0$, de sorte que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x)/\Gamma(x) = e^{S(x)} = e^0 = 1$, et donc $f = \Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice (2)

1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge en décroissant vers 0 et soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, et l'on suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.$$
   b) En déduire que la série $\sum a_n b_n$ converge, et que son reste R_n, donné bien sûr par $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k b_k$, vérifie $|R_n| \leqslant 2M a_n$.
   c) Montrer que la série $\sum \sin(nx)/\sqrt{n}$ converge sur $\mathbb{R}$, et que la fonction $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nx)/\sqrt{n}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(nx)/(n\sqrt{n})$.
   a) Justifier la bonne définition de la fonction f, et montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
   b) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
   c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
   d) Que peut-on dire de $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$?

▶ **Corrigé.–**

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1})\\ &= a_0 B_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k\\ &= a_0 B_0 - a_1 B_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.\end{aligned}$$

b) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $|(a_k-a_{k+1}B_k|=|B_k|\times|a_k-a_{k+1}|\leqslant M(a_k-a_{k+1})$. Comme $a_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}0$, alors la série $\sum(a_k-a_{k+1})$ converge, et admet pour somme $\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k-a_{k+1})=a_0$, donc la série $\sum(a_k-a_{k+1})B_k$ converge, ce qui signifie que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})B_k\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles converge. Comme de plus $a_nB_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, alors d'après la relation obtenue en a), la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui signifie que la série $\sum a_nb_n$ converge. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|R_n|&=\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_kb_k\Big|=\Big|\sum_{k=0}^{+\infty}a_kb_k-\sum_{k=0}^{n}a_kb_k\Big|\\&=\Big|\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k-a_{k+1})B_k-\Big(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_nB_n\Big)\Big|\\&=\Big|\sum_{k=n}^{+\infty}(a_k-a_{k+1})B_k-a_nB_n\Big|\leqslant M\sum_{k=n}^{+\infty}(a_k-a_{k+1})+a_n|B_n|\\&\leqslant Ma_n+Ma_n=2Ma_n.\end{aligned}$$

c) Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)&=\operatorname{Im}\Big(\sum_{k=0}^{n}e^{\mathrm{i}kx}\Big)=\operatorname{Im}\Big(\frac{1-e^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-e^{\mathrm{i}x}}\Big)\\&=\operatorname{Im}\Big(\frac{-e^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}\big(e^{\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}-e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}x}\big)}{e^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}\big(e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}\big)}\Big)\\&=\operatorname{Im}\Big(e^{\mathrm{i}\frac{n}{2}x}\times\frac{\sin\big(\frac{n+1}{2}x\big)}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}\Big)\\&=\frac{\cos\big(\frac{nx}{2}\big)\times\sin\big(\frac{n+1}{2}x\big)}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin(kx)\right|\leqslant 1/|\sin(\frac{x}{2})|$, et comme la suite $(1/\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en décroissant vers 0, alors la série $\sum\sin(nx)/\sqrt{n}$ converge. Remarquons que si $x\in\mathbb{Z}$, alors $\sin(nx)=0$, et la série $\sum\sin(nx)/\sqrt{n}$ converge donc quel que soit le réel x.
La fin de la question b) ci-dessus montre aussi que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\sin(kx)/\sqrt{n}\right|\leqslant 1/(\sqrt{n}\sin(\frac{x}{2}))$.

Or, si $\varepsilon \in]0\,;\pi[$, on a $\min_{x\in[\varepsilon\,;2\pi-\varepsilon]} |\sin(x)| = \sin(\varepsilon/2)$, si bien que pour tout $x \in [\varepsilon\,; 2\pi - \varepsilon]$,

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}\Big| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)},$$

et la série $\sum \sin(kx)/\sqrt{k}$ converge donc uniformément sur $[\varepsilon\,;2\pi-\varepsilon]$. On en déduit que la fonction S est continue sur $[\varepsilon\,;2\pi-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon \in]0\,;\pi[$, donc S est continue sur $]0\,;2\pi[$. Comme S est 2π-périodique, elle est donc continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto \cos(nx)/\sqrt{n}$ est continue, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\cos(nx)/(n\sqrt{n})| \leqslant 1/(n\sqrt{n})$. Comme la série de Riemann $\sum 1/(n\sqrt{n})$ converge, la série $\sum \cos(nx)/(n\sqrt{n})$ converge alors normalement sur $\mathbb{R}$, et la fonction f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

   b) La série trigonométrique $\sum \cos(nx)/(n\sqrt{n})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, si bien qu'elle est la série de Fourier de sa somme f, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_n(f) = \frac{1}{n\sqrt{n}},\quad b_n(f) = 0 \text{ et } a_0(f) = 0.$$

   La fonction f est paire, 2π-périodique : si elle était de surcroît de classe $\mathcal{C}^1$, alors f' serait impaire, 2π-périodique et continue ; sa série de Fourier serait alors de la forme $\sum \beta_n \sin(nx)$, avec pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\beta_n = b_n(f') &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{\big[f(t)\sin(nt)\big]_0^{2\pi}}_{=0} - n\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t\Big) \quad \text{(I.P.P.)} \\
&= \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t = n\times a_n(f) = -\frac{n}{n\sqrt{n}} = -\frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

   La formule de Parseval appliquée à f' donnerait alors

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(f'(t)\big)^2 \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^2,$$

   ce qui est impossible puisque la série $\sum 1/n$ diverge. La fonction f n'est donc pas de classe $\mathcal{C}^1$.

   c) La série de fonctions $\sum u_n$ converge en tout point de la droite réelle ; de plus, $u_n'(x) = -\sin(nx)/\sqrt{n}$. Il s'ensuit que pour tout $\varepsilon \in]0\,;\pi[$, la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment $[\varepsilon\,;2\pi-\varepsilon]$. On en déduit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;2\pi[$, et comme f est 2π-périodique, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

d) Supposons que f' admette une limite finie ℓ quand x tend vers 0^+ : alors, comme f est paire, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\ell$, et l'on peut prolonger f' en une fonction continue par morceaux, 2π-périodique et impaire, que l'on notera g, avec

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z},\ g(x)=f'(x) \text{ et } \forall k\in\mathbb{Z},\ \lim_{x\to 2k\pi^+} g(x)=\ell,\ \lim_{x\to 2k\pi^-} g(x)=-\ell.$$

La série de Fourier de g est alors de la forme $\sum b_n(g)\sin(nx)$, avec

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\mathrm{d}t=-\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La formule de Parseval donnerait alors

$$\int_0^{2\pi}\big(g(t)\big)^2\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(-\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)^2=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n},$$

ce qui est à nouveau impossible : la fonction $t\mapsto\big(g(t)\big)^2$ est dans ces conditions bien intégrable sur $[0\,;2\pi]$, mais la série $\sum 1/n$ diverge. On en déduit que f n'admet pas de limite finie en 0.

Exercice (3). Développement eulérien de la fonction sinus

Soient les fonctions f, g et D définies sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} \Big), \; g(x) = \pi \text{cotan}(\pi x) \text{ et } D = g - f.$$

1. Justifier la bonne définition de f et montrer que les fonctions f, g et D sont impaires, 1-périodiques et continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\begin{cases} f\big(\frac{x}{2}\big) + f\big(\frac{x+1}{2}\big) & = 2f(x) \\ g\big(\frac{x}{2}\big) + g\big(\frac{x+1}{2}\big) & = 2g(x). \end{cases}$
3. Montrer que la fonction D se prolonge par continuité en une fonction $\widetilde{D}$ sur $\mathbb{R}$, et justifier l'existence de $\alpha \in [0\,;1]$ telle que $M = \widetilde{D}(\alpha)$, où $M = \max_{t \in [0\,;1]} \widetilde{D}(t)$. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{D}(\alpha/2^n) = M$; en déduire que $\widetilde{D}$ est nulle, et que $f = g$.
4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \quad \text{cotan}\Big(\frac{x}{2}\Big) - \text{cotan}(x) = \frac{1}{\sin(x)},$$
et en déduire que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \quad \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \Big(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{n+1-x} \Big).$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1\,;1[$, on pose
$$p_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - \frac{x^2}{k^2}\Big).$$
   a) Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur l'intervalle $]-1\,;1[$ vers une fonction p à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On note alors $p(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 - x^2/k^2)$, pour tout $x \in]-1\,;1[$.
   b) Montrer que $\forall x \in]-1\,;1[$, $\ln\big(p(x)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\big(1 - x^2/k^2\big)$, et en déduire que la fonction p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$, avec
$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad \frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}.$$
   c) En déduire que
$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad \sin(\pi x) = \pi x \times \prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{k^2}\Big).$$

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \frac{2x}{x^2-n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2x \times \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus, pour tout x dans ce domaine,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{-x+n} + \frac{1}{-x-n}\Big) = -\Big(\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}\Big)\Big) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

donc f est impaire. Par ailleurs,

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x), \text{ avec } f_n(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k}\Big)\,;$$

or, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f_n(x+1) &= \frac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{x+1+k} + \frac{1}{x+1-k}\Big) \\ &= f_n(x) + \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x), \end{aligned}$$

et donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $f(x+1) = f(x)$, c'est-à-dire que f est 1-périodique. Ensuite, si $a \in \,]0\,;1/2[$, alors pour tout $x \in [a\,;1-a]$,

$$\Big|\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\Big| = \Big|\frac{2x}{x^2-n^2}\Big| \leqslant \frac{2}{n^2-x^2} \leqslant \frac{2}{n^2-a^2},$$

et comme la série numérique $\sum 1/(n^2-a^2)$ converge, alors la série de fonctions $\sum\Big(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\Big)$ converge normalement sur tout segment de $]0\,;1[$. On en déduit que la fonction f est continue sur $]0\,;1[$, et comme elle est 1-périodique, elle est aussi continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Par ailleurs, il est évident que g est impaire, 1-périodique et continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: on en déduit que $D = g - f$ possède également ces propriétés.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big) &= \frac{2}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{2}{x+2n} + \frac{2}{x-2n}\Big) \\ &\quad + \frac{2}{1+x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{2}{x+1+2n} + \frac{2}{x+1-2n}\Big) \\ &= \frac{2}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{2}{x+k} + \frac{2}{x-k}\Big) = 2g(x), \end{aligned}$$

et

$$g\Big(\frac{x}{2}\Big)+g\Big(\frac{x+1}{2}\Big)=\pi\Big(\mathrm{cotan}\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)+\mathrm{cotan}\Big(\frac{\pi(x+1)}{2}\Big)\Big)$$
$$=\pi\Bigg(\frac{\cos\big(\frac{\pi x}{2}\big)}{\sin\big(\frac{\pi x}{2}\big)}+\frac{-\sin\big(\frac{\pi x}{2}\big)}{\cos\big(\frac{\pi x}{2}\big)}\Bigg)$$
$$=\pi\times\frac{\cos^2\big(\frac{\pi x}{2}\big)-\sin^2\big(\frac{\pi x}{2}\big)}{\sin\big(\frac{\pi x}{2}\big)\cos\big(\frac{\pi x}{2}\big)}=\pi\times\frac{\cos(\pi x)}{\frac{1}{2}\sin(\pi x)}$$
$$=2\pi\times\mathrm{cotan}(\pi x)=2g(x).$$

3. Au voisinage de 0,
$$\pi\times\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\pi x\times\frac{1+o(x)}{\pi x+o(x)}=1+o(x),$$
si bien que $\pi\times\mathrm{cotan}(\pi x)=1/x+o(1)$, et $\pi\times\mathrm{cotan}(\pi x)-1/x\xrightarrow[x\to 0]{}0$.
De plus, pour tout $x\in[-1/2\,;1/2]$,
$$\Big|\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\Big|=\Big|\frac{2x}{x^2-n^2}\Big|\leqslant\frac{2|x|}{n^2-1/4},$$
d'où
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\frac{1}{x+n}+\frac{1}{x-n}\Big|\leqslant 2|x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1/4}\xrightarrow[x\to 0]{}0;$$
donc $D(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$, et comme D est 1-périodique, alors elle se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$, en posant $\widetilde{D}(p)=0$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$.
La fonction $\widetilde{D}$ est ainsi continue sur le segment $[0\,;1]$: d'après le théorème de Weierstrass, il existe donc $\alpha\in[0\,;1]$ tel que $\widetilde{D}(\alpha)=M$. Mais alors, d'après la question 2, $\widetilde{D}(\alpha/2)+\widetilde{D}\big((\alpha+1)/2\big)=2\widetilde{D}(\alpha)=2M$, et comme $\widetilde{D}(\alpha/2)\leqslant M$ et $\widetilde{D}\big((\alpha+1)/2\big)\leqslant M$, alors $\widetilde{D}(\alpha/2)=\widetilde{D}\big((\alpha+1)/2\big)=M$.
De proche en proche, on obtient $\forall n\in\mathbb{N}$, $\widetilde{D}(\alpha/2^n)=M$; or, $\widetilde{D}$ est continue en 0, si bien que $0=\widetilde{D}(0)=\lim_{n\to+\infty}\widetilde{D}(\alpha/2^n)=M$.
On en déduit que $\forall x\in[0\,;1]$, $\widetilde{D}(x)=0$, et comme $\widetilde{D}$ est 1-périodique, alors
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \widetilde{D}(x)=0.$$
Ainsi, $D=g-f$ est la fonction nulle, et donc $g=f$.

4. Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, on a
$$\mathrm{cotan}\Big(\frac{x}{2}\Big)-\mathrm{cotan}(x)=\frac{\cos\big(\frac{x}{2}\big)}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{2\cos^2\big(\frac{x}{2}\big)}{2\sin\big(\frac{x}{2}\big)\cos\big(\frac{x}{2}\big)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$
$$=\frac{1+\cos(x)}{\sin(x)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{1}{\sin(x)},$$

d'où, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin(\pi x)} &= \pi \times \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \pi \times \operatorname{cotan}(\pi x) \\
&= \frac{2}{x} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x/2}{(x/2)^2 - n^2} - \frac{1}{x} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - n^2} \\
&= \frac{1}{x} + 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - (2n)^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - n^2} \\
&= \frac{1}{x} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - (2n)^2} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{x^2 - (2n+1)^2} \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{2x}{x^2 - n^2} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n+1-x}\right).
\end{aligned}$$

5. a) Pour tout $x \in]-1\,;1[$, on a $\ln\big(p_n(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - x/k^2)$, de sorte que $\ln\big(p_n(x)\big) < 0$, et si $x \in]-1\,;1[\setminus\{0\}$, $\ln(1 - x^2/k^2) \underset{k \to +\infty}{\sim} -x^2/k^2$. Comme la série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge, alors $\sum \ln(1 - x^2/k^2)$ converge aussi : on en déduit que la suite $\Big(\ln\big(p_n(x)\big)\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On pose $\ell(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln\big(p_n(x)\big)$, et alors : $p_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{\ell(x)} \in \mathbb{R}_+^*$.

b) La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, et donc pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\ln\big(p(x)\big) = \lim_{n \to +\infty} \ln\big(p_n(x)\big) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Soit maintenant $a \in]0\,;1[$: alors, $\forall x \in [-a\,;a]$,

$$\left|\frac{2x}{x^2 - k^2}\right| \leqslant \frac{2}{n^2 - a^2},$$

et comme la série numérique $\sum 1/(n^2 - a^2)$ est convergente, alors la série de fonctions $\sum \dfrac{2x}{x^2 - n^2}$ converge normalement sur tout segment contenu dans l'intervalle ouvert $]-1\,;1[$.

Le théorème de dérivation sous le signe somme assure alors que la fonction $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - x^2/k^2) = \ln\big(p(x)\big)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-1\,;1[$, et que pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\big(\ln\circ p\big)'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-k^2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^2}{x^2-k^2}.$$

c) Soit la fonction $h :]0\,;1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln\big(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\big)$. On a pour tout point x de $]0\,;1[$,

$$h'(x) = \frac{\pi x}{\sin(\pi x)} \times \frac{\pi^2 x \times \cos(\pi x) - \pi \times \sin(\pi x)}{(\pi x)^2} = \pi\times\text{cotan}(\pi x) - \frac{1}{x}$$

$$\overset{3.}{=} \sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k}\Big) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-k^2}$$

$$\overset{5.b)}{=} \frac{p'(x)}{p(x)} = \big(\ln\circ p\big)'(x).$$

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0\,;1[,\ h(x) = \ln\big(p(x)\big) + c$.
On obtient la valeur de c en observant que :

$$c = \lim_{x\to 0^+} \Big(h(x) - \ln\big(p(x)\big)\Big) = 0 - 0 = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]0\,;1[,\ h(x) = \ln\big(p(x)\big)$, et donc

$$\forall x \in]0\,;1[, \quad \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = p(x) \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \pi x \times p(x).$$

Enfin, sachant que les fonctions sinus et $x \mapsto xp(x)$ sont impaires, on a $\sin(\pi x) = \pi x \times p(x)$ est vrai pour tout $x \in]-1\,;1[$, et donc

$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad \sin(\pi x) = \pi x \times \prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1 - \frac{x^2}{k^2}\Big).$$

Exercice (4). La fonction zêta

1. Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. Montrer que la série $\sum 1/n^s$ converge.

2. Soit la fonction zêta de Riemann

$$\begin{aligned} \zeta :\ D &\to \mathbb{C} \\ s &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \end{aligned}$$

   où $D = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

   a) Montrer que la fonction ζ continue.

   b) Montrer que $\zeta(s) \xrightarrow[\mathrm{Re}(s)\to+\infty]{} 1$.

3. a) Montrer que la restriction de la fonction ζ à $]1\,;+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x > 1$,

$$\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(-\ln(x)\big)^k}{n^s}.$$

   b) Montrer que la fonction

$$\begin{aligned} h :\ ]1\,;+\infty[\times\mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ (x,y) &\mapsto \zeta(x+\mathrm{i}y) \end{aligned}$$

   est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que pour tous k et ℓ dans $\mathbb{N}$ et pour tout couple (x,y) dans $]1\,;+\infty[\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial x^k \partial y^\ell}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(-\ln(x)\big)^k \times \big(-\mathrm{i}\ln(y)\big)^\ell}{n^{x+\mathrm{i}y}}.$$

4. Pour $s \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(s) = \dfrac{1}{n^s} - \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$.

   Montrer que la série de fonctions $\sum w_n$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$ pour tout $a > 0$, et en déduire que le développement asymptotique de $\zeta(s)$ au voisinage de 1^+ est donné par

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1),$$

   où γ est la constante gamma d'Euler.

5. Donner un développement asymptotique de ζ quand $\mathrm{Re}(s)$ tend vers l'infini.

▶ **Corrigé.–**

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $s \in \mathbb{C}$; alors, $|1/n^s| = 1/n^{\mathrm{Re}(s)}$. Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, la série de Riemann $\sum 1/n^{\mathrm{Re}(s)}$ est convergente, donc la série $\sum 1/n^s$ est absolument convergente : elle est donc aussi convergente.

2. a) Soit $a>1$, et soit la bande $D_a=\{z\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z)\geqslant a\}$; pour tout $s\in D_a$, on a $|1/n^s| = 1/n^{\mathrm{Re}(s)} \leqslant 1/n^a$, et comme la série numérique $\sum 1/n^a$ converge, alors la série $\sum 1/n^s$ converge normalement, donc aussi uniformément, sur D_a.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $v_n :\ s \mapsto 1/n^s$ est continue sur D_a, et donc d'après le théorème de continuité des séries de fonctions, la fonction ζ est continue sur D_a. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, la fonction ζ est donc continue sur $\bigcup_{a>1} D_a = D$.

   b) D'après le point a), la série $\sum 1/n^s$ converge normalement sur le sous-ensemble $D_2 = \big\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 2\big\}$, et l'on a donc, d'après le théorème d'interversion des limites,
$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} \frac{1}{n^s}\Big), \quad \text{soit} \quad \lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} \zeta(s) = 1,$$
puisque $1^s = 1$ et que pour tout $n \geqslant 2$, $\lim_{\mathrm{Re}(s)\to+\infty} 1/n^s = 0$.

3. a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n :\ x \mapsto 1/n^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_n^{(k)}(x) = \big(-\ln(n)\big)^k/n^x$.
Soit alors $a > 1$; on a pour tout $x \in [a\,;+\infty[$,
$$\Big|\frac{\big(-\ln(n)\big)^k}{n^x}\Big| \leqslant \frac{\big(\ln(n)\big)^k}{n^a},$$
et comme la série numérique $\sum \big(\ln(n)\big)^k/n^a$ converge (car $a > 1$), alors la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$.
Le théorème de dérivation sous le signe somme s'applique donc, et assure (par récurrence sur k) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]a\,;+\infty[$.
Cela étant vrai pour tout $a > 1$, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]1\,;+\infty[$. La fonction ζ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$, et
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in]1\,;+\infty[, \quad \zeta^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(-\ln(n)\big)^k}{n^x}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $v_n : (x,y) \mapsto 1/n^{x+\mathrm{i}y}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^{k+\ell} v_n}{\partial x^k \partial y^\ell}(x,y) = \frac{\big(-\ln(n)\big)^k \times \big(-\mathrm{i}\ln(n)\big)^\ell}{n^{x+\mathrm{i}y}}.$$

Or, pour tout $a > 1$ et tout $(x,y) \in D_a = [a\,;+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\big(-\ln(n)\big)^k \times \big(-\mathrm{i}\ln(n)\big)^\ell}{n^{x+\mathrm{i}y}}\right| \leqslant \frac{\big(\ln(n)\big)^{k+\ell}}{n^a}.$$

Comme pour $a > 1$, la série numérique $\sum \big(\ln(n)\big)^{k+\ell}/n^a$ converge, alors la série de fonctions $\sum \dfrac{\big(-\ln(n)\big)^k \times \big(-\mathrm{i}\ln(n)\big)^\ell}{n^{x+\mathrm{i}y}}$ converge normalement sur D_a, et ce pour tout $a > 1$. On en déduit comme en 2.a), que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D et que

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2,\ \forall (x,y) \in D,\quad \frac{\partial^{k+\ell} h}{\partial x^k \partial y^\ell}(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(-\ln(n)\big)^k \times \big(-\mathrm{i}\ln(n)\big)^\ell}{n^{x+\mathrm{i}y}}.$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $s \in \mathbb{R}_+$, $1/(n+1)^s \leqslant 1/t^s \leqslant 1/n^s$, d'où

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{n^s}, \text{ et donc } 0 \leqslant w_n(s) \leqslant \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}.$$

Or, la série télescopique $\sum \Big(\dfrac{1}{n^s} - \dfrac{1}{(n+1)^s}\Big)$ converge, ce qui fait que la série $\sum w_n(s)$ converge elle aussi, et ce pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $a > 0$ et pour tout $s \in [a\,;+\infty[$, on a

$$|R_n(s)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k(s) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\Big) = \frac{1}{(n+1)^s} \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}.$$

La suite $(R_n)_n$ des restes converge donc uniformément sur $[a\,;+\infty[$, et la série de fonctions $\sum w_k$ converge dès lors uniformément sur $[a\,;+\infty[$.

Par conséquent, la fonction somme $g : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} w_n(s)$ est continue sur $[a\,;+\infty[$ pour tout $a > 0$; la fonction g est donc continue sur $]0\,;+\infty[$, et pour tout $s > 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \\ &= \zeta(s) + \Big[\frac{1}{(s-1)t^{s-1}}\Big]_1^{+\infty} = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.\end{aligned}$$

Par continuité de la fonction g, on a alors, pour tout $s > 1$:

$$\begin{aligned}
\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = g(s) \xrightarrow[s\to 1^+]{} g(1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} w_k(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} w_k(1) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \Big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \Big).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n) \Big) + o(1)$.

5. La série de fonctions $\sum 2^s/n^s$ converge normalement sur la bande donnée par $D_3 = \{ s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) \geqslant 2 \}$.

   Ainsi, $\sum_{n=3}^{+\infty} 2^s/n^s \xrightarrow[\mathrm{Re}(s)\to+\infty]{} 0$, de sorte que $\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + o(2^{-s})$ quand $\mathrm{Re}(s)$ tend vers $+\infty$. De même, $\sum_{n=4}^{+\infty} 2^s/n^s \xrightarrow[\mathrm{Re}(s)\to+\infty]{} 0$. On en déduit le développement asymptotique suivant, pour $\mathrm{Re}(s) \to +\infty$,

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + o\Big(\frac{1}{3^s}\Big).$$

Exercice (5). Fonction continue partout et dérivable nulle part

Soit la fonction
$$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n!x)}{n!}$$

On fixe $a \in \mathbb{R}$; pour $u \in \mathbb{R}^*$, on pose $g(u) = \dfrac{f(a+u)-f(a)}{u}$, soit
$$g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(u), \quad \text{où } g_n(u) = \frac{\cos(n!a+n!u)-\cos(n!a)}{n!u}.$$

Soit aussi, pour $p \in \mathbb{N}^*$, l'intervalle $I_p = [2\pi/p!\,; 4\pi/p!]$.

1. Justifier la bonne définition de f, et montrer que f est continue.
2. Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note
$$M_{n,p} = \max_{u \in I_p} g_n(u) \quad \text{et} \quad m_{n,p} = \min_{u \in I_p} g_n(u).$$
   a) Montrer que si $n < p$, alors $M_{n,p} - m_{n,p} \leqslant 2\pi n!/p!$.
   b) Montrer que si $n > p$, alors $M_{n,p} - m_{n,p} \leqslant 2p!/\pi n!$.
   c) Montrer que $M_{n,p} - m_{n,p} \geqslant 1/2\pi$.
3. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{p!} \leqslant \frac{2}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{p!}{n!} \leqslant \frac{1}{p}.$$
4. a) En déduire que la différence $\max_{x \in I_p} g(x) - \min_{x \in I_p} g(x)$ ne tend pas vers 0 quand p tend vers $+\infty$.
   b) En déduire que la fonction f n'est pas dérivable au point a.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|\cos(n!x)/n!| \leqslant 1/n!$; par suite, comme la série $\sum 1/n!$ converge, c'est que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   De plus, $\sum \cos(n!x)/n!$ est une série de fonctions continues qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: la fonction f est donc elle-même continue sur $\mathbb{R}$.

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n:\ I_p \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\cos(n!a+n!x)-\cos(n!x)}{n!x}$

   est continue sur le segment $I_p = [2\pi/p!\,; 4\pi/p!]$, et elle est y donc bornée et y atteint ses bornes.

Il existe donc $\alpha_p, \beta_p \in I_p$ tels que $M_{n,p} = g_n(\alpha_p)$ et $m_{n,p} = g_n(\beta_p)$. Le théorème des accroissements finis assure alors l'existence de deux réels c_p et d_p compris entre α_p et β_p tels que

$$g_n(\alpha_p) = -\sin(n!a + n!c_p) \quad \text{et} \quad g_n(\beta_p) = -\sin(n!a + n!d_p),$$

d'où

$$\begin{aligned} M_{n,p} - m_{n,p} = g_n(\alpha_p) - g_n(\beta_p) &= \sin(n!a + n!d_p) - \sin(n!a + n!c_p) \\ &\leqslant n!|d_p - c_p|, \text{ d'après l'inégalité des accroissements finis,} \\ &\leqslant n!\Big(\frac{4\pi}{p!} - \frac{2\pi}{p!}\Big) = n!\,\frac{2\pi}{p!}. \end{aligned}$$

b) On a, pour tout $x \in I_p = [2\pi/p!\,; 4\pi/p!]$,

$$|g_n(x)| = \frac{|\cos(n!a + n!x) - \cos(n!a)|}{n!x} \leqslant \frac{2}{n!\,\dfrac{2\pi}{p!}} = \frac{p!}{n!\pi},$$

d'où $M_{n,p} - m_{n,p} \leqslant 2p!/(n!\pi)$.

c) Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_p : I_p \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n!a + n!x$. Puisque $u_p(I_p) = [n!a + n!2\pi\,; n!a + 4\pi]$ qui est un segment de longueur 2π, alors il existe deux réels γ et δ de I_p, tels que $\cos\big(u_p(\gamma)\big) = 1$ et $\cos\big(u_p(\delta)\big) = -1$, de sorte que

$$g_p(\gamma) = \frac{\cos\big(u_p(\gamma)\big) - \cos(p!a)}{p!\gamma} = \frac{1 - \cos(p!a)}{p!\gamma} \geqslant \frac{1 - \cos(p!a)}{4\pi}$$

et

$$g_p(\delta) = g_p(\gamma) = \frac{\cos\big(u_p(\delta)\big) - \cos(p!a)}{p!\delta} = -\frac{1 - \cos(p!a)}{p!\delta} \leqslant \frac{-1 - \cos(p!a)}{4\pi},$$

si bien que $g_p(\gamma) - g_p(\delta) \geqslant 2/4\pi = 1/2\pi$, et $M_{n,p} - m_{n,p} \geqslant 1/2\pi$.

3. Pour tout entier $p \geqslant 2$,

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{n!}{p!} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p(p-1)} + \cdots + \frac{1}{p!} \leqslant \frac{1}{p} + (p-2)\cdot\frac{1}{p(p-1)} < \frac{2}{p},$$

puisque la somme contient $p-1$ termes en tout, formant une suite décroissante. Selon le même principe, on a aussi :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{p!}{n!} &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \ldots \\ &< \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^k} = \frac{\dfrac{1}{p+1}}{1 - \dfrac{1}{p+1}} = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

4. En utilisant les réels γ et δ de la question 2.c), on a :

$$\begin{aligned} g(\gamma)-g(\delta) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(g_n(\gamma)-g_n(\delta)\big) = g_p(\gamma)-g_p(\delta)+\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n\neq p}}\big(g_n(\gamma)-g_n(\delta)\big) \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi}-\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}^*\\ n\neq p}}(M_{n,p}-m_{n,p}) \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi}-\sum_{n=1}^{p-1}2\pi\cdot\frac{n!}{p!}-\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{p!}{n!} \qquad \text{d'après 2.b)} \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi}-2\pi\times\frac{2}{p}-\frac{2}{\pi}\times\frac{1}{p}, \end{aligned}$$

d'où

$$\max_{x\in I_p} g(x)-\min_{x\in I_p} g(x)\geqslant \frac{1}{2\pi}-\frac{4\pi}{p}-\frac{2}{\pi p}.$$

Le membre de droite tend vers un réel >0 quand p tend vers $+\infty$, et le membre de gauche ne tend donc pas vers 0.

5. On raisonne par l'absurde. Supposons que f est dérivable au point a ; il vient alors que $g(x)\xrightarrow[x\to 0]{} f'(a)$.
Ainsi, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\eta>0\ ;\ |x-a|<\eta\ \Rightarrow\ |g(x)-f'(a)|<\varepsilon$.
Soit alors $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $4\pi/p!<\eta$; on a donc $\forall x\in I_p,\ |g(x)-f'(a)|<\varepsilon$, et comme g est continue sur le segment I_p, alors il existe $z_p,\ \omega_p\in I_p$ tels que $g(z_p)=\max_{x\in I_p} g(x)$ et $g(\omega_p)=\min_{x\in I_p} g(x)$.
On a alors

$$g(z_p)-g(\omega_p)=g(z_p)-f'(a)+f'(a)-g(\omega_p)<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon,$$

soit $\max_{x\in I_p} g(x)-\min_{x\in I_p} g(x)<2\varepsilon$.
Ainsi, $\max_{x\in I_p} g(x)-\min_{x\in I_p} g(x)\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, ce qui contredit le résultat de la question 4.
On en déduit que f n'est pas dérivable au point a.