Chapitre VIII

Exemples de séries de Fourier et de leurs applications (Leçon 414)

Exercice (1). Utilisation d'une série de Fourier

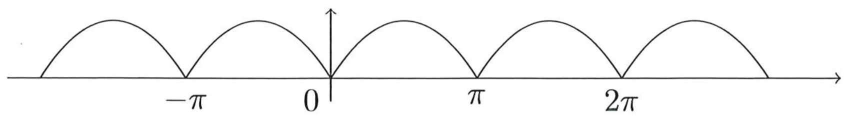
1. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;\pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n^2} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\left((2n+1)x\right)}{(2n+1)^3}.$$

2. En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^4 = \pi^4/90$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^6 = \pi^6/945$.

▶ **Corrigé.–**

1. ▷ Soit f la fonction paire, π-périodique, définie pour tout x de $[0\,;\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$.



La fonction f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge (normalement) vers elle.

Comme f est paire, alors $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; ensuite,

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi t - t^2)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\Big[\pi\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\Big]_0^\pi$$
$$= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\Big) = \frac{\pi^2}{3}.$$

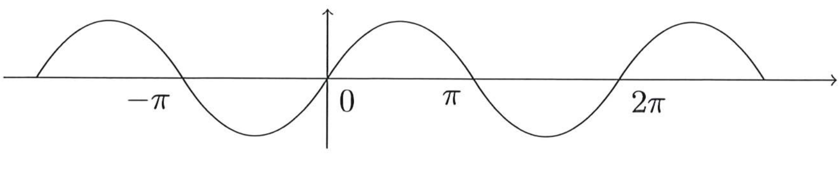
Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(2nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi t - t^2)\cos(2nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[(\pi t - t^2)\frac{\sin(2nt)}{2n}\Big]_0^\pi}_{=0} - \frac{1}{2n}\int_0^\pi (\pi - 2t)\sin(2nt)\mathrm{d}t\Big) \quad \text{(I.P.P.)} \\
&= -\frac{1}{\pi n}\int_0^\pi (\pi - 2t)\sin(2nt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\pi n}\Big(\Big[-(\pi - 2t)\frac{\cos(2nt)}{2n}\Big]_0^\pi - \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^\pi \cos(2nt)\mathrm{d}t}_{=1-1=0}\Big) \quad \text{(I.P.P. encore)} \\
&= \frac{-1}{2\pi n^2}(\pi + \pi) = -\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

La série de Fourier obtenue pour f donne donc, pour tout x de $[0\,;\pi]$,

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}.$$

▷ Soit maintenant g la fonction impaire, 2π-périodique, définie pour tout x de $[0\,;\pi]$, par $g(x) = x(\pi - x)$.



La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge (normalement) vers elle-même. Comme g est impaire, alors pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n(g) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
b_n(g) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(t)\sin(nt)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi t - t^2)\sin(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[-(\pi t - t^2)\frac{\cos(nt)}{n}\Big]_0^\pi}_{=0} + \frac{1}{n}\int_0^\pi (\pi - 2t)\cos(nt)\mathrm{d}t\Big) \quad \text{(I.P.P.)} \\
&= \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (\pi - 2t)\cos(nt)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\Big(\underbrace{\Big[(\pi-2t)\frac{\sin(nt)}{n}\Big]_0^\pi}_{=0} + \frac{2}{n}\int_0^\pi \sin(nt)\mathrm{d}t\Big) \quad \text{(I.P.P.)}$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\Big[\frac{-\cos(nt)}{n}\Big]_0^\pi = \frac{4}{\pi n^3}\big(-(-1)^n+1\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{8}{\pi n^3} & \text{si } n \text{ est impair.}\end{cases}$$

La série de Fourier obtenue pour g donne donc :

$$\forall x \in [0\,;\pi], \quad x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{(2n+1)^3}.$$

2. La fonction f est π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, et l'on a donc d'après la formule de Parseval,

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi^2}{3}\Big)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2t^2 - 2\pi t^3 + t^4)\mathrm{d}t,$$

soit

$$\frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5}\Big) = 2\pi^4\,\frac{10-15+6}{30} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Ainsi,

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \Big(\frac{1}{15} - \frac{1}{18}\Big)\pi^4 = \frac{6-5}{90}\pi^4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

De même, la fonction g est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, si bien que

$$\Big(\frac{8}{\pi}\Big)^2\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{(2n+1)^3}\Big)^2 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(g(t)\big)^2\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{15}.$$

Dès lors, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{15\times 64} = \frac{\pi^6}{960}$, puis

$$\zeta(6) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{64}\zeta(6).$$

Et donc,

$$\zeta(6) = \frac{64}{63}\times\frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Exercice (2). Inégalité de Wirtinger

Soit $T>0$, et soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, vérifiant $\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$.

1. Montrer que l'on a alors

$$\int_0^T \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t,$$

2. Montrer que l'on a égalité si, et seulement si, il existe deux réels λ et μ tels que

$$f(t)=\lambda\cos\big(\frac{2\pi}{T}t\big)+\mu\sin\big(\frac{2\pi}{T}t\big).$$

▶ **Corrigé.–**

1. Les fonctions f et f' sont continues par morceaux, donc d'après la formule de Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_0^T \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t=\frac{\big(a_0(f)\big)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f)\big)^2+\big(b_n(f)\big)^2\Big)$$

$$\text{et}\quad \frac{1}{T}\int_0^T \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t=\frac{\big(a_0(f')\big)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f')\big)^2+\big(b_n(f')\big)^2\Big)$$

Or, $a_0(f)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$ par hypothèse,

et $a_0(f')=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f'(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{T}\big(f(T)-f(0)\big)=0$, car f est T-périodique.

Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n(f)&=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\mathrm{d}t \quad \text{(on réalise une I.P.P.)}\\
&=\frac{2}{T}\Big(\underbrace{\Big[f(t)\times\frac{T}{2\pi n}\times\sin\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\Big]_0^T}_{=0}-\frac{T}{2\pi n}\int_0^T f'(t)\sin\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\mathrm{d}t\Big)\\
&=-\frac{T}{2\pi n}b_n(f')
\end{aligned}$$

Par suite, $\big(a_n(f)\big)^2=\dfrac{T^2}{4\pi^2n^2}\big(b_n(f')\big)^2$, et

$$b_n(f)=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\mathrm{d}t \quad \text{(on réalise encore une I.P.P.)}$$

$$= \frac{2}{T}\Big(\underbrace{\Big[f(t)\times\frac{-T}{2\pi n}\times\cos\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\Big]_0^T}_{=0}+\frac{T}{2\pi n}\int_0^T f'(t)\cos\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\,\mathrm{d}t\Big)$$

$$= \frac{2}{T}\big(\frac{-T}{2\pi n}\big)\big(\underbrace{f(T)-f(0)}_{=0}\big)+\frac{T}{2\pi n}a_n(f')=\frac{T}{2\pi n}a_n(f'),$$

de sorte que $\big(b_n(f)\big)^2=\dfrac{T^2}{4\pi^2n^2}\big(a_n(f')\big)^2$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f)\big)^2+\big(b_n(f)\big)^2\Big)\\
&= \frac{T^2}{4\pi^2}\times\frac{1}{2}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\big(a_n(f')\big)^2+\big(b_n(f')\big)^2\Big)\\
&\leqslant \frac{T^2}{4\pi^2}\times\frac{1}{2}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f')\big)^2+\big(b_n(f')\big)^2\Big)\\
&= \frac{T^2}{4\pi^2}\times\frac{1}{T}\int_0^T \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

D'où, $\displaystyle\int_0^T \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T \big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t.$

2. L'égalité a lieu si, et seulement si (voir le calcul ci-dessus),

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\Big(\big(a_n(f')\big)^2+\big(b_n(f')\big)^2\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\big(a_n(f')\big)^2+\big(b_n(f')\big)^2\Big)$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{n=1}^{+\infty}\big(1-\frac{1}{n^2}\big)\Big(\big(a_n(f')\big)^2+\big(b_n(f')\big)^2\Big)=0.$$

Donc, pour tout $n\geqslant 2$, $\big(a_n(f')\big)^2+\big(b_n(f')\big)^2=0 \Leftrightarrow a_n(f')=b_n(f')=0.$

Ainsi, pour tout $n\geqslant 2$, $\begin{cases} a_n(f) & =\big(-T/(2\pi n)\big)b_n(f')=0\\ \text{et } b_n(f) & =\big(T/(2\pi n)\big)a_n(f')=0,\end{cases}$

et comme f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(t)&=\underbrace{\frac{a_0(f)}{2}}_{=0}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(f)\cos\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)+b_n(f)\sin\big(\frac{2\pi n}{T}t\big)\\
&=a_1(f)\cos\big(\frac{2\pi}{T}t\big)+b_1(f)\sin\big(\frac{2\pi}{T}t\big),\end{aligned}$$

ce qui est bien la forme voulue. Pour terminer, on vérifie que si f a cette forme, alors on a égalité dans l'inégalité de Wirtinger.

Exercice (3). Phénomène de Gibbs

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique qui coïncide avec la fonction identité sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier de f.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme partielle de rang n de la série de Fourier de f.
   a) Montrer que la somme S_n possède, comme fonction de la variable $x \in [0\,;2\pi[$, des extrema locaux en nombre 2n, et que le premier d'entre eux est un minimum local, atteint en le point $\pi/(n+1)$.
   b) Montrer que $S_n\Big(\dfrac{\pi}{n+1}\Big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi - 2\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t.$
   c) Interpréter ce dernier résultat, sachant que $2\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \approx 3{,}7.$

▶ **Corrigé.–**

1. On a : $\quad a_0(f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\mathrm{d}t = 2\pi$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
a_n(f) + \mathrm{i}b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} te^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\Big[t\times\frac{e^{\mathrm{i}nt}}{in}\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{\mathrm{i}\times n}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\times\frac{2\pi}{\mathrm{i}\times n} - 0 = -\frac{2i}{n},
\end{aligned}$$

donc $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = -2/n$.

2. a) D'après 1), on a $S_n(x) = \pi - 2\sum_{k=1}^n \dfrac{\sin(nx)}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et donc

$$\begin{aligned}
S_n'(x) &= -2\sum_{k=1}^n \cos(kx) = -2\mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^n e^{\mathrm{i}kx}\Big) \\
&= -2\mathrm{Re}\Big(e^{\mathrm{i}x}\times\frac{1-e^{\mathrm{i}nx}}{1-e^{\mathrm{i}x}}\Big), \quad \text{pour tout } x \in]0\,;2\pi[, \\
&= -2\mathrm{Re}\Big(e^{\mathrm{i}x}\times\frac{e^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}}}{e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\times\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\Big) = \frac{-2\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\times\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} S_n'(x)=0 \\ \text{et } x\in[0\,;2\pi[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{nx}{2}\right)=0 \text{ ou } \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)=0 \\ \text{et } x\in]0\,;2\pi[, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \quad x=\frac{2k\pi}{n} \text{ (noté } x_k) \text{ où } k\in\{1,2,\dots,n-1\} \\ \text{ou} \quad x=\frac{\pi}{n+1}+\frac{2k\pi}{n} \text{ (noté } y_k) \text{ où } k\in\{0,1,\dots,n\}. \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $g_n : x \mapsto \sin(nx/2)$ s'annule au point x_k, avec $g_n'(x_k) = (n/2)\cos(k\pi) = (-1)^k n/2$: ainsi, g_k' garde un signe constant au voisinage de x_k, donc la fonction g_k s'annule en changeant de signe en x_k.
Comme par ailleurs les fonctions $x \mapsto \cos\big((n+1)x/2\big)$ et $x \mapsto \sin(x/2)$ sont de signe constant au voisinage du point x_k, on en déduit que S_n' s'annule en changeant de signe en x_k, ce qui prouve que S_n admet un extremum local en ce point, et ce pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
On prouve de la même façon que S_n admet un extremum local en chacun des points y_k, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$.
Enfin, $S_n'(0) = -2n < 0$, $S_n'(\pi/(n+1)) = 0$ et S_n' est continue et ne s'annule pas sur $\big]0\,;\pi/(n+1)\big[$: on en déduit que S_n est décroissante sur $[0\,;\pi/(n+1)]$, et l'extremum local de S_n au point $y_0 = \pi/(n+1)$ est donc un minimum local.

b) D'après a), pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n'(t) = \frac{-2\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \times \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

et en utilisant la formule $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$S_n'(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 1 - \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

De plus, $S_n(0) = \pi$ et S_n' est continue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$S_n(x) = S_n(0) + \int_0^x S_n'(t)\mathrm{d}t,$$

de sorte que

$$S_n\left(\tfrac{\pi}{n+1}\right) = \pi + \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} S_n'(t)\mathrm{d}t = \pi + \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \left(1 - \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \pi + \frac{\pi}{n+1} - I_n, \quad \text{avec } I_n = \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u=(n+\frac{1}{2})t$ donne

$$I_n=\int_0^{\frac{n+1/2}{n+1}\pi}\frac{\sin(u)}{(n+\frac{1}{2})\sin\left(\frac{u}{2n+1}\right)}\,\mathrm{d}u.$$

On définit alors la fonction

$$\begin{aligned}\varphi_n:\ ]0\,;\pi] &\to \mathbb{R}\\ u &\mapsto \begin{cases}\dfrac{\sin(u)}{(n+\frac{1}{2})\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)} & \text{si } u\in\left]0\,;\frac{n+1/2}{n+1}\pi\right]\\ 0 & \text{si } u\in\left]\frac{n+1/2}{n+1}\pi\,;\pi\right[.\end{cases}\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction φ_n est continue par morceaux, et l'on a pour tout $u\in]0\,;\pi[$,

$$\varphi_n(u)\xrightarrow[n\to+\infty]{}2\frac{\sin(u)}{n}\quad \text{puisque } \sin\left(\frac{u}{2n+1}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{u}{2n+1}.$$

Par ailleurs, la fonction sinus est continue sur le segment $[0\,;\pi/2]$, avec l'inégalité $\sin(x)\geqslant(2/\pi)x$, valable sur ce même segment. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $u\in]0\,;\pi[$,

$$\sin\left(\frac{u}{2n+1}\right)\geqslant\frac{2}{\pi}\times\frac{u}{2n+1}>0,\quad \text{donc } 0\leqslant\varphi_n(u)\leqslant\pi\times\frac{\sin(u)}{u}=:\varphi(u).$$

Comme la fonction φ est prolongeable par continuité sur $[0\,;\pi]$, elle est donc intégrable sur cet intervalle, et d'après le théorème de convergence dominée :

$$I_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^{\pi}2\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u,\ \text{donc } S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\pi-\int_0^{\pi}2\frac{\sin(u)}{u}\mathrm{d}u.$$

c) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc d'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement, et

$$S_n(0)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\tfrac{1}{2}\big(f(0^+)+f(0^-)\big)=\frac{0+2\pi}{2}=\pi.$$

Si la série de Fourier de f convergeait uniformément, on aurait alors, d'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{n\to+\infty}S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}S_n(0)=\pi.$$

Or, d'après b), $\pi-S_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_0^{\pi}2\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x\approx3{,}7.$

Le nombre $\displaystyle\int_0^{\pi}2\frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$ peut donc être interprété comme « l'écart à la convergence uniforme » : c'est le phénomène de Gibbs.

Exercice (4). Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}) : \quad y'' + y = |\sin(x)|.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$
2. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

▶ **Corrigé.–**

1. La fonction paire $x \mapsto |\sin(x)|$ est π-périodique, continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, donc sa série de Fourier converge (normalement) vers elle. On a
$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t)\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}[-\cos(t)]_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ et
$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \times \cos(2nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Big(\sin\big((2n+1)t\big) - \sin\big((2n-1)t\big)\Big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{-\cos\big((2n+1)t\big)}{2n+1} + \frac{\cos\big((2n-1)t\big)}{2n-1}\Big]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1}\Big) = \frac{-4}{\pi} \times \frac{1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$
2. L'équation différentielle $(\mathcal{E})$ devient
$$y''(x) + y(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$
Cherchons une solution particulière de l'équation différentielle sous la forme $z_p(x) = A_n \times \cos(2nx)$. On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ z_p''(x) = -A_n \times 4n^2 \cos(2nx)$$
puis
$$\cos(2nx) = z_p''(x) + z_p(x) = A_n(1 - 4n^2)\cos(2nx),$$
d'où
$$A_n = \frac{1}{1 - 4n^2}.$$

Montrons alors que la fonction

$$y_p : x \mapsto \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$$

est une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

La série $\sum \dfrac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2}$ a pour série dérivée $\sum \dfrac{-2n}{(4n^2-1)^2} \times \sin(2nx)$, et pour série dérivée seconde $\sum \dfrac{-4n^2}{(4n^2-1)^2} \times \cos(2nx)$, qui convergent toutes trois normalement sur $\mathbb{R}$, car pour $\alpha \in \{0, 1, 2\}$,

$$\frac{n^\alpha}{(4n^2-1)^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{16} \times \frac{1}{n^{4-\alpha}},$$

terme général d'une série numérique manifestement convergente : la fonction y_p est ainsi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,

$$y_p''(x) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n^2}{(4n^2-1)^2} \times \cos(2nx),$$

puis

$$y_p''(x) + y_p(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1} = |\sin(x)|.$$

Par ailleurs, l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle homogène $y'' + y = 0$ est l'espace $\{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) ;\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\}$. Ainsi, les solutions de $(\mathcal{E})$ sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \cdot \cos(x) + \mu \cdot \sin(x) + \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{(4n^2-1)^2},$$

lesquelles forment donc un espace affine de dimension 2.

Exercice (5). Une caractérisation de la fonction sinus

Soit $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$; on suppose que $f'(0)=1$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|f^{(n)}(x)|\leqslant 1$.

1. Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,
$$c_p(f)=\frac{1}{(\mathrm{i}\times p)^k}c_p(f^{(k)}),$$
où $c_p(f)$ est le p-ième coefficient de Fourier complexe de f. En déduire que si $|p|\geqslant 2$, alors $c_p(f)=0$.
2. a) Montrer alors que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f(x)=\frac{a_0(f)}{2}+a_1(f)\cos(x)+b_1(f)\sin(x).$$
b) Montrer que $b_1(f)=1$ et $a_1(f)=0$.
c) Conclure.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$,
$$\begin{aligned}c_p(f)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t\\
&\overset{\text{I.P.P.}}{=}\frac{1}{2\pi}\left(\Big[\frac{-1}{\mathrm{i}\times p}e^{-\mathrm{i}pt}f(t)\Big]_0^{2\pi}+\frac{1}{\mathrm{i}\times p}\int_0^{2\pi}f'(t)e^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\times\frac{-1}{\mathrm{i}\times p}\underbrace{\big(f(2\pi)-f(0)\big)}_{0}+\frac{1}{\mathrm{i}\times p}\times\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)e^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\mathrm{i}\times p}c_p(f').\end{aligned}$$
De proche en proche, on obtient
$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad c_p(f)=\frac{1}{(\mathrm{i}\times p)^k}\times c_p(f^{(k)}),$$
donc pour tout p tel que $|p|\geqslant 2$:
$$\begin{aligned}|c_p(f)|&\leqslant\frac{1}{|p|^k}\times|c_p(f^{(k)})|=\frac{1}{|p|^k\times 2\pi}\Big|\int_0^{2\pi}f^{(k)}(t)e^{-\mathrm{i}pt}\mathrm{d}t\Big|\\
&\leqslant\frac{1}{|p|^k\times 2\pi}\int_0^{2\pi}|f^{(k)}(t)|\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{|p|^k\times 2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=\frac{1}{|p|^k},\end{aligned}$$
et comme $1/|p|^k\xrightarrow[p\to+\infty]{}0$, alors $|c_p(f)|=0$.

2. a) La fonction f est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc d'après le théorème de Dirichlet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\big),$$

et l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt})\mathrm{d}t = c_{-k}(f) + c_k(f) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_k(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} f(t)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt})\mathrm{d}t = \mathrm{i}\big(c_k(f) - c_{-k}(f)\big). \end{aligned}$$

D'où, pour $k \geqslant 2$, $\; a_k(f) = b_k(f) = 0$, et donc

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + a_1(f)\cos(x) + b_1(f)\sin(x).$$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = -a_1(f)\sin(x) + b_1(f)\cos(x)$, d'où $1 = f'(0) = b_1(f)$, et donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= -a_1(f)\sin(x) + \cos(x) \\ &= \sqrt{1+\big(a_1(f)\big)^2} \times \left(\frac{-a_1(f)}{\sqrt{1+\big(a_1(f)\big)^2}}\sin(x) + \frac{1}{\sqrt{1+\big(a_1(f)\big)^2}}\cos(x)\right). \end{aligned}$$

En posant $\theta = \arccos\left(-a_1(f)/\sqrt{1+\big(a_1(f)\big)^2}\right)$, on a

$$f'(x) = \sqrt{1+\big(a_1(f)\big)^2}\,\big(\cos(\theta)\sin(x) + \sin(\theta)\cos(x)\big),$$

et $\sqrt{1+\big(a_1(f)\big)^2} = f'(\pi/2 - \theta) \leqslant 1$, donc $a_1(f) = 0$.
Ainsi, $\; \forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = a_0(f)/2 + \sin(x)$.
Enfin, $\; |a_0(f)|/2 = \max(|f(\pi/2)|\,, |f(-\pi/2)|) \leqslant 1$, donc $a_0(f) = 0$, et finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x).$$

Exercice (6). Intégrale de Fresnel (via les séries de Fourier)

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi t^2}dt$ sont convergentes.
2. Soit $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 1-périodique définie par $f(x) = e^{2i\pi x^2}$ sur l'intervalle $[0\,;1[$.
   a) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $c_{2p}(f) = \displaystyle\int_{p-1}^{p} e^{2i\pi t^2}dt$, et en déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi t^2}dt = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p}(f)$.
   b) Étabir alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi t^2}dt = \frac{1}{2}\big(f(0)+f(1)\big)$, puis que
$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt = \int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. La fonction $t \mapsto e^{it}/\sqrt{t}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, et $e^{it}/\sqrt{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1/\sqrt{t}$; comme la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0\,;1]$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt$ converge. De plus, pour tout $A > 1$,
$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt &= \Big[\frac{e^{it}}{i\sqrt{t}}\Big]_1^A + \frac{1}{2i}\int_1^A \frac{e^{it}}{t^{3/2}}dt \quad \text{(I.P.P.)}\\ &= \frac{e^{iA}}{i\sqrt{A}} - \frac{e^{i}}{i} + \frac{1}{2i}\int_1^A \frac{e^{it}}{t^{3/2}}dt \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{-e^{i}}{i} + \frac{1}{2i}\int_1^{+\infty}\frac{e^{it}}{t^{3/2}}dt.\end{aligned}$$
La dernière intégrale est bien convergente, puisque pour tout $t \geqslant 1$, on a $|e^{it}/t^{3/2}| \leqslant 1/t^{3/2}$, où la fonction $t \mapsto 1/t^{3/2}$ est intégrable sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. On en déduit dès lors que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt$ converge, et qu'il en est donc de même $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{it}}{\sqrt{t}}dt$. Le changement de variable $t = \sqrt{u/(2\pi)}$ donne par ailleurs
$$\int_0^{+\infty} e^{2i\pi t^2}dt = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{iu}}{\sqrt{u}}du,$$
et comme $t \mapsto e^{2i\pi t^2}$ est paire, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi t^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{2i\pi t^2}dt$ est convergente.

2. a) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
c_{2p}(f) &= \int_0^1 f(t)e^{-4\mathrm{i}\pi pt}\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{2\mathrm{i}\pi(t^2-2pt)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 e^{2\mathrm{i}\pi\left((t-p)^2-p^2\right)}\mathrm{d}t = \underbrace{e^{-2\mathrm{i}\pi p^2}}_{=1}\int_0^1 e^{2\mathrm{i}\pi(t-p)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 e^{2\mathrm{i}\pi(t-p)^2}\mathrm{d}t = \int_{p-1}^{p+1} e^{2\mathrm{i}\pi u^2}\mathrm{d}u, \quad \text{avec } u = p-t.
\end{aligned}$$

Enfin, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}du$ converge, donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}\mathrm{d}u = \lim_{\substack{N\to+\infty\\ M\to+\infty}} \int_{-M}^{N} e^{2i\pi u^2}\mathrm{d}u = \lim_{\substack{N\to+\infty\\ M\to+\infty}} \sum_{p=-M+1}^{N} \int_{p-1}^{p} e^{2i\pi u^2}\mathrm{d}u,$$

donc la série $\displaystyle\sum \int_{p-1}^{p} e^{2i\pi u^2}du$ converge, et :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty}\int_{p-1}^{p} e^{2i\pi u^2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}\mathrm{d}u \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}\mathrm{d}u.$$

b) Il est facile de voir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et comme elle est 1-périodique, alors d'après le théorème de Dirichlet, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)e^{2i\pi px}$, d'où

$$1 = f(0) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f), \text{ et } i = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)e^{\mathrm{i}p\pi} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (-1)^p c_p(f),$$

et ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1+\mathrm{i}}{2} = \frac{f(0)+f(1)}{2} &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p(f)\times\left(1+(-1)^p\right) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p}(f) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi u^2}\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} e^{2i\pi u^2}\mathrm{d}u \\
&= 2\Big(\int_0^{+\infty}\cos(2\pi u^2)\mathrm{d}u + \mathrm{i}\int_0^{+\infty}\sin(2\pi u^2)\mathrm{d}u\Big),
\end{aligned}$$

de sorte que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(2\pi u^2)\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty}\sin(2\pi u^2)\mathrm{d}u = 1/4$. Le changement de variable $t = \sqrt{2\pi}u$ donne finalement :

$$\int_0^{+\infty}\cos(t^2)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sin(t^2)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

Exercice (7). Équation de la chaleur La température d'une barre métallique de longueur π, maintenue à ses extrémités à la température 0 est une fonction $g : [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue et vérifiant les conditions suivantes.

(a). Pour tout $x \in [0\,;\pi]$: $g(x,0) = f(x)$, où $f : [0\,;\pi] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

(b). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $g(0,t) = g(\pi,t) = 0$.

(c). Les fonctions $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial t}$ existent et sont continues sur le produit $[0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$, telles que $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$.

Le but de cet exercice est de montrer l'existence et l'unicité d'une telle fonction g.

1. Montrer que si une telle fonction g existe, alors il existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{R})$ telle que

   ▷ $\forall (x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+, \quad g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(t)\sin(nx)$

   ▷ $\forall (t,n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}^*, \quad B_n'(t) = -n^2 B_n(t)$.

   En déduire que, pour tout $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+$,
$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx), \quad \text{avec} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

2. Montrer que la fonction ainsi construite répond à la question.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on définit la fonction impaire $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, qui est 2π-périodique et définie sur $[0\,;\pi]$ par $g_t(x) = g(x,t)$. Il est facile de voir que g_t est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (même de classe $\mathcal{C}^1$), et comme elle est 2π-périodique alors sa série de Fourier converge normalement vers elle. Comme g_t est impaire, alors $a_n(g_t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en notant $B_n(t) = b_n(g_t)$, on a pour tout $x \in [0\,;\pi]$,
$$g_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n(t)\sin(nx)$$
$$\text{et} \quad B_n(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g_t(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

Ensuite, la fonction $(x,t) \mapsto g(x,t)\sin(nx)$ est continue sur $[0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+$, donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction B_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.
De plus, la fonction $(x,t) \mapsto \partial g/\partial t(x,t)\sin(nx)$ est continue sur le produit $[0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction B_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $t > 0$,

$$B_n'(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x \overset{(c)}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x.$$

En utilisant deux intégrations par parties consécutives, on a alors, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
B_n'(t) &= \frac{2}{\pi}\Big(\underbrace{\Big[\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\sin(nx)\Big]_0^\pi}_{=0} - n\int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\cos(nx)\mathrm{d}x\Big) \\
&= -\frac{2n}{\pi}\int_0^\pi \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{2n}{\pi}\Big(\underbrace{\big[g(x,t)\cos(nx)\big]_0^\pi}_{=0 \text{ par (a)}} + n\int_0^\pi g(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x\Big) \\
&= -\frac{2n^2}{\pi}\int_0^\pi g(x,t)\sin(nx)\mathrm{d}x = -n^2 B_n(t),
\end{aligned}$$

et par conséquent $B_n(t) = b_n e^{-n^2 t}$, avec

$$b_n = B_n(0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x,0)\sin(nx)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x,$$

et $g(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$ pour tout $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$, et même pour tout $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+$, car

$$g(x,0) = g_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(g_0)\sin(nx), \quad \text{où } b_n(g_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x = b_n.$$

On a donc obtenu une unique expression possible pour une fonction solution du problème.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} h_n : [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto b_n e^{-n^2 t}\sin(nx). \end{aligned}$$

Elle est continue, et l'on a pour tout $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+$, $|h_n(x,t)| \leqslant |b_n|$.

La fonction impaire $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique telle que $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in [0\,;\pi]$ est (facilement vérifiable) de classe $\mathcal{C}^1$, donc

$$b_n(\widetilde{f}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = b_n,$$

Ainsi, $b_n = b_n(\widetilde{f}) = b_n(\widetilde{f}')/n$.
Or, d'après la formule de Parseval, la série $\sum_{n\geqslant 1} \big(b_n(\widetilde{f}')\big)^2$ converge, et comme

$$|b_n| = \Big|\frac{1}{n} b_n(\widetilde{f}')\Big| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + \big(b_n(\widetilde{f}')\big)^2\Big),$$

alors la série $\sum_{n\geqslant 1} |b_n|$ converge. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n$ converge normalement sur $[0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+$, et la fonction

$$\begin{aligned} g \,:\, [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ (x,t) &\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} h_n(x,t) \end{aligned}$$

est continue sur $[0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+$. De plus, pour tout $a > 0$ et tout $t \in [a\,;+\infty[$,

$$\Big|\frac{\partial h_n}{\partial t}(x,t)\Big| \leqslant n^2 |b_n| e^{-n^2 a},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente. On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} \partial h_n/\partial t$ converge normalement, donc uniformément sur le produit $[0\,;\pi] \times [a\,;+\infty[$. Par conséquent, $\partial g/\partial t$ est bien définie et continue, avec

$$\forall (x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 b_n e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

On montre de même que $\partial g/\partial x$ et $\partial^2 g/\partial x^2$ sont bien définies et continues sur $[0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$, avec pour tout couple $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n e^{-n^2 t}\cos(nx) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} -n^2 b_n e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

Ainsi, pour tout couple $(x,t) \in [0\,;\pi] \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t),$$

ce qui prouve que la fonction g est solution de l'équation de la chaleur. Le raisonnement mené à la question précédente garantit ainsi l'unicité de cette solution.

Chapitre VII

Exemples d'application des séries entières (Leçon 413)

Exercice (1).

Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}_3): \quad xy'' + 2y' - xy = 0.$$

1. Déterminer les solutions de $(\mathcal{H}_3)$ développables en séries entières.
2. Résoudre $(\mathcal{H}_3)$.
3. Résoudre $(\mathcal{H}_3)$ avec le changement de fonction $z(x) = xy(x)$.

▶ **Corrigé.–**

On résout ici l'équation différentielle donnée par l'énoncé, en l'occurrence

$$(\mathcal{H}_3): \quad x \times y''(x) + 2y'(x) - x \times y(x) = 0.$$

1. On suppose que $(\mathcal{H}_3)$ possède une solution développable en série entière, sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. Alors, pour tout $x \in]-R\,; R[$, on a :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \times x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n \times x^{n-2},$$

d'où, pour tout $x \in]-R\,;R[$,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n \times x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} na_n \times x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n-1)+2n\big)a_n \times x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_n \times x^{n-1} - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} \times x^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)(k+2)a_{k+1} \times x^k - \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} \times x^k \\
&= 2a_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \big((k+1)(k+2)a_{k+2} - a_{k-1}\big) \times x^k.
\end{aligned}$$

D'où, $a_1 = 0$, et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ a_{k+1} = \dfrac{a_{k-1}}{(k+1)\times(k+2)}$,

$$\text{soit}\quad \forall k \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{2k+1} = \dfrac{a_{2k-1}}{(2k+1)\times(2k+2)} \\ \text{et} \\ a_{2k+2} = \dfrac{a_{2k}}{(2k+2)(\times 2k+3)}. \end{cases}$$

Une récurrence facile donne alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2k} = \frac{a_0}{(2k+1)!},$$

d'où $y(x) = a_0 \times \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = a_0 \times \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$, et $R = +\infty$.

2. Sur $I_1 =]-\infty\,;0[$ ou $I_2 =]0\,;+\infty[$, on cherche une deuxième solution, linéairement indépendante de la fonction $y_1 :\ x \mapsto \operatorname{sh}(x)/x$.

   On pose $y(x) = \lambda(x) \times y_1(x)$; alors, pour tout réel x,

   $$y'(x) = \lambda'(x) \times y_1(x) + \lambda(x) \times y_1'(x)$$

   et

   $$y''(x) = \lambda''(x) \times y_1(x) + 2\lambda'(x) \times y_1'(x) + \lambda(x) \times y_1''(x),$$

   d'où, pour tout réel x non nul,

   $$\begin{aligned}
   0 &= x \times y''(x) + 2y'(x) - x \times y(x) \\
   &= \lambda(x) \times \underbrace{\big(x \times y_1''(x) + y_1'(x) - x \times y_1(x)\big)}_{=0} \\
   &\qquad + \lambda'(x) \times \big(2y_1(x) + 2x \times y_1'(x)\big) + \lambda''(x) \times x \times y_1''(x).
   \end{aligned}$$

Or, $x\times y_1(x) = x\times\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \mathrm{sh}(x)$, et

$$2y_1(x) + 2x\times y_1'(x) = 2\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} + 2x\times\frac{x\times\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{x^2} = 2\mathrm{ch}(x),$$

d'où $\lambda''(x) = -\dfrac{2\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\times\lambda'(x)$.

Ainsi, il existe un réel α tel que, pour tout x non nul,

$$\lambda'(x) = \alpha\times\exp\Big(\int\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\mathrm{d}x\Big) = \alpha\times e^{-2\ln(|\mathrm{sh}(x)|)} = \frac{\alpha}{\mathrm{sh}^2(x)},$$

et $\lambda(x) = \alpha\times\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2(x)} = \alpha\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$.

On obtient ainsi des solutions particulières de $(\mathcal{H}_3)$ sous la forme :

$$y_p(x) = \lambda(x)\times y_1(x) = \alpha\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}\times\frac{\mathrm{sh}(x)}{x} = \alpha\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{x}.$$

La fonction $y_2 : x\mapsto\mathrm{ch}(x)/x$ est donc solution de $(\mathcal{H}_3)$ sur $I_1 =]-\infty\,;0[$, ou sur $I_2 =]0\,;+\infty[$.

On conclut que sur I_1 ou I_2, on a l'égalité $\mathcal{S}_{\mathcal{H}_3} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, avec

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y_1(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\quad\text{et}\quad y_2(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{x}.$$

Remarque.– En posant $z(x) = x\times y(x)$, nous avons alors

$$z'(x) = x\times y'(x) + y(x),\quad\text{et } z''(x) = x\times y''(x) + 2y'(x).$$

La fonction $x\mapsto z(x)$ vérifie dès lors l'équation différentielle

$$z''(x) - z(x) = 0.$$

Les solutions de cette équation différentielle sont donc de la forme

$$z:\ x\mapsto\alpha\times\mathrm{ch}(x) + \beta\times\mathrm{sh}(x),$$

pour α et β parcourant $\mathbb{R}$.

Il en résulte que sur $I_1 =]-\infty\,;0[$ ou sur $I_2 =]0\,;+\infty[$, les solutions sont les fonctions :

$$y\ :\ x\mapsto\alpha\times\frac{\mathrm{ch}(x)}{x} + \beta\times\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}.$$

On aimerait avoir l'espace des solutions sur $\mathbb{R}^*$ tout entier, qui est de dimension 4 ? ? ? ! De plus, la question 3 est remplacée dans la solution par une remarque ...

Enfin, pourquoi l'équadiff porte le nom H_3, d'où vient le 3 ? ?

Exercice (2). Intégrale de Poisson

Soit $\theta \in]0\,;\pi[$, et soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right) \end{array}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction f.
   Indication.– Calculer f'.
2. En déduire que $\forall x \in]-1\,;1[$, $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)\mathrm{d}\theta = 0$.
3. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > 1$, $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)\mathrm{d}\theta$.
4. Que dire si $x = 1$ ou $x = -1$?

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x - 2\cos(\theta)}{x^2 - 2x\cos(\theta) + 1} = \frac{x - e^{\mathrm{i}\theta} + x - e^{-\mathrm{i}\theta}}{(x - e^{\mathrm{i}\theta})\times(x - e^{-\mathrm{i}\theta})} \\
&= \frac{1}{x - e^{-\mathrm{i}\theta}} + \frac{1}{x - e^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{-e^{\mathrm{i}\theta}}{1 - e^{\mathrm{i}\theta}x} + \frac{-e^{-\mathrm{i}\theta}}{1 - e^{-\mathrm{i}\theta}x} \\
&= -e^{\mathrm{i}\theta}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\mathrm{i}\theta}\times x\right)^n - e^{-\mathrm{i}\theta}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-\mathrm{i}\theta}\times x\right)^n, \quad \text{si } |x| < 1, \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}\times x^n + \left(e^{-\mathrm{i}\theta}\right)^{n+1}\times x^n\right) \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{\mathrm{i}(n+1)\theta} + e^{-\mathrm{i}(n+1)\theta}\right)\times x^n \\
&= -2\times\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left((n+1)\theta\right)\times x^n.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} - 2\times\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\left((n+1)\theta\right)\times\frac{x^{n+1}}{n+1} = -2\times\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}\times x^n.$$

2. D'après 1, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$\int_0^\pi \ln\left(x^2 - 2x\cos(\theta) + 1\right)\mathrm{d}\theta = -2\int_0^\pi\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}\times x^n\Big)\mathrm{d}\theta.$$

Or, pour tout $\theta \in [0;\pi]$, on a $\left|\dfrac{\cos(n\theta)}{n}\times x^n\right| \leqslant |x|^n$, et la série géométrique $\sum |x|^n$ converge car $|x|<1$: par conséquent, la série $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n}\times x^n$ converge normalement sur $[0;\pi]$, d'où

$$\int_0^{\pi}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\cos(n\theta)\Big)\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\times\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\mathrm{d}\theta = 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1;1[$, on a $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\big(x^2-2x\cos(\theta)+1\big)\,\mathrm{d}\theta = 0$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x|>1$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\ln\big(x^2-2x\cos(\theta)+1\big)\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi}\ln\Big(x^2\big(1-\frac{2}{x}\cos(\theta)+\frac{1}{x^2}\big)\Big)\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi}\ln(x^2)\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi}\ln\Big(\big(\frac{1}{x}\big)^2-\frac{2}{x}\cos(\theta)+1\Big)\mathrm{d}\theta\\ &= \int_0^{\pi}\ln(x^2)\mathrm{d}\theta, \qquad \text{car } \Big|\frac{1}{x}\Big|<1,\\ &= \pi\ln(x^2) = 2\pi\ln(|x|).\end{aligned}$$

4. On a, pour $\theta \in]0;\pi]$,

$$f(1) = \ln\big(2-2\cos(\theta)\big) = \ln\Big(4\sin^2\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big) = 2\ln(2) + 2\ln\Big(\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big),$$

et

$$\begin{aligned}2\ln\Big(\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)\Big) &= 2\ln\big(\frac{\theta}{2}+o_0(\theta)\big) = 2\ln\Big(\theta\big(\frac{1}{2}+o_0(1)\big)\Big)\\ &= 2\ln(\theta) + 2\ln\big(\frac{1}{2}+o_0(1)\big) \underset{\theta\to 0}{\sim} 2\ln(\theta).\end{aligned}$$

Or, pour $\varepsilon \in \big]0;\pi/2\big[$,

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\pi/2}\ln(\theta)\mathrm{d}\theta &= [\theta\ln(\theta)-\theta]_{\varepsilon}^{\pi/2}\\ &= \frac{\pi}{2}\ln\big(\frac{\pi}{2}\big) - \frac{\pi}{2} + \varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \frac{\pi}{2}\ln\big(\frac{\pi}{2}\big) - \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta$ converge. Le changement de variable $\varphi = \pi-\theta$ donne alors

$$\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta = \int_{\pi/2}^{\pi}\ln\big(\sin(\varphi)\big)\mathrm{d}\varphi,$$

de sorte que $\displaystyle\int_0^{\pi}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta$.

Le changement de variable $u = \pi/2-\theta$ donne, pour sa part,

$$\int_0^{\pi/2}\ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\ln\Big(\sin\big(\frac{\pi}{2}-u\big)\Big)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2}\ln\big(\cos(u)\big)\mathrm{d}u,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(\theta)\big)\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi/2} \ln\big(\cos(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(\theta)\cos(\theta)\big)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{\pi}{4}\ln(2) + \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{\pi}{4}\ln(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(x)\big)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{avec } x = 2\theta.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}\ln(2),$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \ln\big(2 - 2\cos(\theta)\big)\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} \Big(2\ln(2) + 2\ln\big(\sin\big(\tfrac{\theta}{2}\big)\big)\Big)\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\ln(2) + 2\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin\big(\tfrac{\theta}{2}\big)\big)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\ln(2) + 4\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(u)\big)\,\mathrm{d}u, \qquad \text{avec } u = \frac{\theta}{2}, \\
&= 2\pi\ln(2) - 4\times\frac{1}{2}\pi\ln(2) = 0 = f(-1).
\end{aligned}$$

Pour le calcul de $f(1)$, le changement de variable $\theta = \pi - \varphi$ donne

$$\begin{aligned}
f(1) &= \int_0^{\pi} \ln\big(2 + 2\cos(\theta)\big)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} \ln\big(2 + 2\cos(\pi - \varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \ln\big(2 - 2\cos(\varphi)\big)\,\mathrm{d}\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Exercice (3). Application au dénombrement

Soit E un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}$). On appelle **dérangement** de E toute permutation σ de E n'ayant aucun point fixe.

On note δ_n le nombre de dérangements de E. Ainsi, $\delta_1 = 0$ et par convention, $\delta_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_k$.
2. Soit $f :]-1;1[\to \mathbb{R}$
$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\delta_n}{n!} x^n.$$
   a) Justifier la définition de f.
   b) Montrer que, $\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.
   c) En déduire que
$$\delta_n = n! \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \Big).$$
3. Calculer de deux façons différentes le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction
$$f : x \mapsto \frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)},$$
et en déduire une formule pour le nombre de couples $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2p + 3q = n$, où n est un entier naturel.

▶ **Corrigé.–**

1. Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$; il y a $\binom{n}{k}$ parties de E à k éléments, et pour chacune de ces parties il y a δ_{n-k} permutations de E qui laissent fixes les éléments de cette partie tout en dérangeant les autres éléments de E. Il y a donc, en tout, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_{n-k}$ permutations de E, et donc
$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} \delta_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \delta_j.$$

2. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \delta_n \leqslant n!$, donc $0 \leqslant \delta_n/n! \leqslant 1$, donc si $0 \leqslant r < 1$ la série $\sum \frac{\delta_n}{n!} r^n$ converge.
   Ainsi, le rayon de convergence de la série $\sum \frac{\delta_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1, ce qui justifie la définition de f.

   b) On a pour tout $x \in]-1\,;1[$, $f(x)e^x = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\delta_k}{k!} x^k \Big) \times \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \Big)$.

Comme ces deux séries entières convergent absolument, alors en utilisant le produit de Cauchy, on a, pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$f(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{\delta_k}{k!(n-k)!}\Big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\delta_k\Big)x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x},$$

et donc $f(x) = e^{-x}/(1-x)$ pour tout $x \in]-1\,;1[$.

c) Toujours en utilisant le produit de Cauchy, on a pour tout $x \in]-1\,;1[$,

$$f(x) = e^{-x} \times \frac{1}{1-x} = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}x^k\Big)\times\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}x^k\Big)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\Big)x^n,$$

et donc par identification des coefficients, $\dfrac{\delta_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$\delta_n = n!\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\Big).$$

3. **Premier calcul.** Pour $|x| < 1$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}\times\frac{1}{x^3-1} = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty}x^{2p}\Big)\times\Big(\sum_{q=0}^{+\infty}x^{3q}\Big)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^2\,;\\ 2p+3q=n}}1\Big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n,$$

avec $a_n = \mathrm{Card}\big(\{(p,q)\in\mathbb{N}^2 \mid 2p+3q=n\}\big)$.

Deuxième calcul. On procède à la décomposition en éléments simples de $f(x)$ pour $|x| < 1$:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x^3-1)} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)}$$
$$= \frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x-j)(x-j^2)}$$
$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-j} + \frac{E}{x-j^2},$$

où

$$B = \frac{1}{(1+1)(1+1+1)} = \frac{1}{6}, \quad C = \frac{1}{(-1-1)^2(1-1+1)} = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{(j^2-1)(j-1)(j-j^2)} = \frac{1}{(2-j-j^2)(j-j^2)} \\ &= \frac{1}{3\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3\mathrm{i}\sqrt{3}} = -\frac{\mathrm{i}}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

et $E = \overline{D} = \dfrac{\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}$.

En calcullant de deux façons différentes $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$, on obtient

$$0 = A+0+C+D+E \Leftrightarrow A+C=0 \Leftrightarrow A=-C=-\frac{1}{4},$$

et donc, pour $|x|<1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+x} \\ &\qquad + \frac{\mathrm{i}j^2}{3\sqrt{3}}\times\frac{1}{1-xj}-\frac{\mathrm{i}j}{3\sqrt{3}}\times\frac{1}{1-xj^2} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{n+1}{6}+\frac{(-1)^n}{4}+\frac{\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}\left(j^{n+2}-j^{2n+1}\right)\right), \end{aligned}$$

d'où, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{5}{12}+\frac{(-1)^n}{4}+\frac{n}{6}+\frac{\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}\left(j^{n+2}-j^{2n+1}\right).$$

Exercice (4). Théorème radial d'Abel – Application

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. On suppose que la série $\sum a_n R^n$ converge, et l'on pose, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$r_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k \quad \text{et} \quad \forall x\in]-R;R[,\ R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k.$$

1. a) Montrer que, pour tout $x\in[0\,;R[$,

$$R_n(x)=r_n\Big(\frac{x}{R}\Big)^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k\Big(\Big(\frac{x}{R}\Big)^{k+1}-\Big(\frac{x}{R}\Big)^{k}\Big).$$

   b) En déduire que la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur l'intervalle $[0\,;R]$, puis que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n=\lim_{\substack{x\to R\\ x<R}}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big).$$

2. **Applications**

   a) Montrer que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+np}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^p},\quad \text{intégrale notée } I_p.$$

   Calculer I_1, I_2 et I_3.

   b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(n+2)},$$

   et montrer que, pour tout $x\in]-1\,;1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}=-(x^2+1)\ln(1-x^2)-2x\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)+3x^2.$$

   En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}=3-4\ln(2)$.

   c) Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries convergentes, telles qu'en posant $c_n=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum c_n$ converge. Montrer que

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)\times\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

▶ **Corrigé.–**

1. a) Pour tout $x \in [0\,;R[$,

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k R^k\Big(\frac{x}{R}\Big)^k=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(r_{k-1}-r_k)\Big(\frac{x}{R}\Big)^k$$

$$=\sum_{k=n+1}^{+\infty} r_{k-1}\Big(\frac{x}{R}\Big)^k-\sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k\Big(\frac{x}{R}\Big)^k$$

(les séries convergent, car la suite (r_k) est bornée et $|x/R|<1$)

$$=r_n\Big(\frac{x}{R}\Big)^{n+1}+\sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k\Big(\Big(\frac{x}{R}\Big)^{k+1}-\Big(\frac{x}{R}\Big)^k\Big).$$

b) Soit $\varepsilon>0$; comme $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geqslant N$ alors $|r_n|<\varepsilon$. On a donc, pour tout $n\geqslant N$ et pour tout $x\in[0\,;R[$,

$$|R_n(x)|\leqslant |r_n|\times\Big(\frac{x}{R}\Big)^{n+1}+\varepsilon\times\sum_{k=n+1}^{+\infty}\Big(\Big(\frac{x}{R}\Big)^k-\Big(\frac{x}{R}\Big)^{k+1}\Big)$$

$$\leqslant \varepsilon+\varepsilon\times\Big(\frac{x}{R}\Big)^{N+1}<2\varepsilon.$$

Comme $|r_n|<\varepsilon$ pour tout $n\geqslant N$, on a alors $|R_n(x)|\leqslant 2\varepsilon$ pour tout réel $x\in[0\,;R]$, et la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0\,;R]$. Par conséquent, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n=\lim\limits_{x\to R^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2. **Applications**

a) Pour $p\in\mathbb{N}^*$, la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^p}{1+np}$ converge ; il vient alors, d'après le théorème radial d'Abel,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+np}=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{1+np}}{1+np}=\lim_{x\to1^-}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 t^{np}\mathrm{d}t.$$

Or, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\int_0^1 t^{np}\mathrm{d}t=\int_0^1\Big(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{np}\Big)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1-(-t^p)^{N+1}}{1+t^p}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^p}-(-1)^{N+1}\int_0^1\frac{t^{(N+1)p}}{1+t^p}\mathrm{d}t,$$

et $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{t^{(N+1)p}}{1+t^p}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1 t^{(N+1)p}\mathrm{d}t=\frac{1}{1+(N+1)p}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0.$

On en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+np} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^p}$, d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(t^2-t+1)}\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\\ &= \frac{1}{3}\ln(2) - 0 + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\ &= \frac{1}{3}\ln(2) + \frac{\pi\sqrt{3}}{9}\cdot\end{aligned}$$

b) D'après la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série est égal à 1. D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}\cdot$$

Les séries entières $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{n}$, $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{n+1}$ et $\sum \dfrac{x^{2n+2}}{2n+1}$ ont un rayon de convergence égal à 1, et l'on a donc pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$\begin{aligned}S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} - 4x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\ &= x^2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - 4x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - x\Big)\\ &= -x^2\ln(1-x^2) - \ln(1-x^2) - x^2 - 4x\Big(-\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)\Big) + 4x^2\\ &= -(x^2+1)\ln(1-x^2) - 2x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + 3x^2\\ &\xrightarrow[x\to 1^-]{} -4\ln(2) - 0 + 3.\end{aligned}$$

On conclut donc grâce au théorème radial d'Abel :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x) = 3 - 4\ln(2).$$

c) Les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ étant convergentes, les trois séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$ ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à 1.

D'après le théorème radial d'Abel, les fonctions

$$f:\begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\end{array},\quad g:\begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\end{array}\quad \text{et}\quad h:\begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\end{array}$$

sont donc continues, et les séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont absolument convergentes pour tout $x \in [0\,;1[$. Le produit de convolution s'applique donc, et pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$f(x)g(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = h(x),$$

puis

$$h(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)g(x) = \Big(\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)\Big) \times \Big(\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)\Big) = f(1)g(1),$$

ce qui est bien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \times \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Exercice (5). Application à l'algèbre.– Une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $R > ||A||$.

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $Re^{i\theta}\mathrm{I}_n - A$ est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et que son inverse est
$$(Re^{i\theta})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(Re^{i\theta})^{-k}A^k\Big).$$
2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^k(Re^{i\theta}\mathrm{I}_n - A)^{-1}\mathrm{d}\theta = A^{k-1}.$$
En déduire que pour tout polynôme P, on a
$$P(A) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re^{i\theta}P(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}\mathrm{I}_n - A)^{-1}\mathrm{d}\theta.$$
3. On note χ_A le polynôme caractéristique de la matrice A, autrement dit $\chi_A(X) = \det(A - X\mathrm{I}_n)$. Montrer que
$$\chi_A(A) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re^{i\theta}\,{}^t\mathrm{com}(Re^{i\theta}\mathrm{I}_n - A)\mathrm{d}\theta,$$
et en déduire que $\chi_A(A) = 0$.

▶ **Corrigé.–**

1. On a $Re^{i\theta}\mathrm{I}_n - A = Re^{i\theta}\big(\mathrm{I}_n - (Re^{i\theta})^{-1}A\big)$, et $||(Re^{i\theta})^{-1}A|| = ||A||/R < 1$, si bien que la matrice $\mathrm{I}_n - (Re^{i\theta})^{-1}A$ est inversible [1], et
$$\big(\mathrm{I}_n - (Re^{i\theta})^{-1}A\big)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(Re^{i\theta})^{-k}A^k.$$
La matrice $Re^{i\theta}\mathrm{I}_n - A$ est dès lors inversible, et
$$\begin{aligned}\big(Re^{i\theta}\mathrm{I}_n - A\big)^{-1} &= (Re^{i\theta})^{-1}\big(\mathrm{I}_n - (Re^{i\theta})^{-1}A\big)^{-1}\\ &= (Re^{i\theta})^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty}(Re^{i\theta})^{-k}A^k\Big).\end{aligned}$$

1. C'est classique, mais il est bon de rappeler que l'on utilise ici l'hypothèse fournie sur la norme, ainsi que le fait que l'espace des matrices est de Banach, de sorte que toute série qui est y normalement convergente est convergente.