Exemples d'études d'applications linéaires continues et de leur norme (Leçon 439)

Exercice (1).

1. **Une norme non atteinte**

   On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et l'application :

   $$\begin{aligned} \varphi :\ & E \to \mathbb{R} \\ & f \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\Big(\frac{1}{n}\Big) \end{aligned}.$$

   a) Soit $f \in E$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2^n} f\Big(\frac{1}{n}\Big)$ est convergente.

   b) Montrer que φ est linéaire et que $|||\varphi||| = 1$.

   c) Montrer que cette norme n'est pas atteinte.

2. **Opérateur de dérivation**

   a) Montrer que les deux applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$:

   $$\begin{aligned} ||\cdot||_\infty :\ & \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ & \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} N :\ & \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ & \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \max_{0\leqslant k\leqslant n} (k!|a_k|) \end{aligned}.$$

   b) Montrer que $D : \begin{aligned} & \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ & \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \end{aligned}$, l'application de dérivation, est linéaire, et étudier sa continuité si on munit $\mathbb{R}[X]$ de chacune des deux normes $||\cdot||_\infty$ ou N.

donc : $\quad \varphi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Or : $\quad |||\varphi||| = \sup\limits_{||f||=1} \big|\varphi(f)\big| \geqslant \varphi(f_n)$, et en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $\quad |||\varphi||| \geqslant 1.$

On en conclut que $|||\varphi||| = 1.$

c) Supposons qu'il existe $g \in E$ telle que $||g||_\infty = 1$ et $\big|\varphi(g)\big| = 1$: comme $\varphi(-g) = -\varphi(g)$, quitte à remplacer g par $-g$, on peut supposer que $||g||_\infty = 1$ et que $\varphi(g) = 1$, soit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot g\big(\frac{1}{k}\big) = 1.$

Comme $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\Big(1-(-1)^k g\big(\tfrac{1}{k}\big)\Big) = 0.$

Or $||g||_\infty = 1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\big|g\big(\frac{1}{k}\big)\big| \leqslant 1 \Leftrightarrow 1-(-1)^k g\big(\frac{1}{k}\big) \geqslant 0.$ Une somme de termes positifs est nulle, si et seulement si chacun de ses termes est nul :

on en déduit $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 1-(-1)^k g\big(\frac{1}{k}\big) = 0 \Leftrightarrow g\big(\frac{1}{k}\big) = (-1)^k$: ceci n'a pas de limite quand k tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que g appartient à E. On a donc démontré par l'absurde, que cette norme n'est pas atteinte.

2. a) On vérifie que $||\cdot||_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$:

i. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X_k \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Big|\Big|\sum_{k=0}^{n} a_k X^n\Big|\Big|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| = 0 \Leftrightarrow \big(\forall k \in \{0,1,\dots,n\},\ a_k = 0\big)$$

$$\Leftrightarrow P = \sum_{k=0}^{n} a_k X_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

ii. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$\forall \ell \in \{0,1,\dots,n\}, \quad |\lambda a_\ell| = |\lambda|\cdot|a_\ell| \leqslant |\lambda|\cdot \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| = |\lambda|\cdot||P||_\infty,$

donc $||\lambda P||_\infty = \max\limits_{0\leqslant \ell\leqslant n} |\lambda a_\ell \leqslant |\lambda|\cdot||P||_\infty\ (\star)$, donc si $\lambda \neq 0$:

$||P||_\infty = \big|\big|\frac{1}{\lambda}(\lambda P)\big|\big|_\infty = \big|\frac{1}{\lambda}\big|\cdot||\lambda P||_\infty$, puis $|\lambda|\cdot||P||_\infty \leqslant ||\lambda P||\infty,$

et donc : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda P||_\infty = |\lambda|\cdot||P||_\infty.$

Exercice (2).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $||\cdot||_i$ ($i = 1$, 2 ou ∞) et on note $|||A|||_i$ la norme subordonnée à l'application linéaire canonique associée à A (soit l'application $\begin{array}{rcl} : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$).

1. Montrer que $|||A|||_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$.

2. Montrer que $|||A|||_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$.

3. a) Montrer que si A est symétrique, alors :

$$|||A|||_2 = \mathscr{C}(A), \quad \text{où} \quad \mathscr{C}(A) = \max_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)}(|\lambda|).$$

Indication : on pourra utiliser le théorème spectral.

   b) Dans le cas général, montrer que : $\quad |||A|||_2 = \sqrt{\mathscr{C}({}^{\mathrm{t}}AA)}$.

▶ **Corrigé.–**

Notons d'abord que les normes $|||\cdot|||_i$ ($i = 1, 2$ ou ∞) existent car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

1. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\quad AX = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$, et on a pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\cdot|x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\cdot||X||_\infty$$
$$\leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\cdot||X||_\infty,$$

donc : $\quad ||AX||_\infty \leqslant \left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\cdot||X||_\infty$, donc $|||A|||_\infty \leqslant \left(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)$.

Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ qui vérifie : $\quad \sum\limits_{j=1}^{n}|a_{k,j}| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$,

3. a) D'après le théorème spectral, puisque A est symétrique réelle, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A : pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que pour tout i compris entre 1 et n, $A\varepsilon_i = \lambda_i \cdot \varepsilon_i$ (les λ_i sont évidemment les valeurs propres de A).

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels tels que $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varepsilon_i$, et on a : $\quad AX = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot A\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \cdot \varepsilon_i$, de sorte que :

$$\left(||AX||_2\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}^2 \lambda_i{}^2 \leqslant \left(\mathscr{C}(A)\right)^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i{}^2\right) = \left(\mathscr{C}(A)\right)^2 \cdot \left(||X||_2\right)^2,$$

   d'où : $\quad ||AX||_2 \leqslant \mathscr{C}(A) \cdot ||X||_2$, puis $|||A|||_2 \leqslant \mathscr{C}(A)$.

   Soit maintenant $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\lambda_k = \mathscr{C}(A)$, on a alors :

$$|||A|||_2 = |||A|||_2 \cdot ||\varepsilon_k||_2 \geqslant ||A\varepsilon_k||_2 = ||\lambda_k \cdot \varepsilon_k||_2 = |\lambda_k| = \mathscr{C}(A),$$

   et par conséquent : $\quad |||A|||_2 = \mathscr{C}(A)$.

b) Dans le cas général, on sait que ${}^t({}^tAA) = {}^tAA$, c'est-à-dire que ${}^tAA$ est symétrique réelle. D'après a), on a donc : $|||\,{}^tAA|||_2 = \mathscr{C}({}^tAA)$. Par ailleurs, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\left(||AX||_2\right)^2 &= {}^t(AX)AX = {}^tX\,{}^tAAX \\
&= \langle {}^tAAX, X\rangle \quad \text{avec le produit scalaire usuel} \\
&\leqslant |||\,{}^tAAX|||_2 \cdot ||X||_2 \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy} \\
&\leqslant |||\,{}^tAA|||_2 \cdot \left(||X||_2\right)^2,
\end{aligned}$$

   d'où : $\quad \left(|||A|||_2\right)^2 \leqslant |||\,{}^tAA|||_2$.

   Or : $||\,{}^tAAX||_2 \leqslant |||\,{}^tA|||_2 \cdot ||AX||_2 \leqslant |||\,{}^tA|||_2 \cdot |||A|||_2 \cdot ||X||_2$,
   donc $|||\,{}^tAA|||_2 \leqslant |||\,{}^tA|||_2 \cdot |||A|||_2$, et donc $\left(|||A|||_2\right)^2 \leqslant |||\,{}^tA|||_2 \cdot |||A|||_2$,
   d'où $|||A|||_2 \leqslant |||\,{}^tA|||_2$.

   De façon symétrique, on a aussi $|||\,{}^tA|||_2 \leqslant |||\,{}^t({}^tA)|||_2 = |||A|||_2$,
   donc $|||A|||_2 = |||\,{}^tA|||_2$. Ainsi :

$$\left(|||A|||_2\right)^2 \leqslant |||\,{}^tAA|||_2 \leqslant |||\,{}^tA|||_2 \cdot |||A|||_2 = \left(|||A|||_2\right)^2,$$

   donc $\left(|||A|||_2\right)^2 = |||\,{}^tAA|||_2 = \mathscr{C}({}^tAA)$, et :

$$|||A|||_2 = \sqrt{\mathscr{C}({}^tAA)}.$$

2. Pour tout $f \in E$, et pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}\left|T(f)(x)\right| &= \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant \|f\|_\infty \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\cdot\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

d'où : $\quad \|T(f)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0\,;\frac{\pi}{2}]} \left|T(f)(x)\right| \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\|f\|_\infty$, donc T est continue,

et $|||T|||_\infty \leqslant \frac{\pi}{2}$..

Ensuite, la fonction $\mathbb{1} : \begin{array}{l}\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto 1\end{array}$ est continue ; on a : $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$,

et pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$T(\mathbb{1})(x) = \int_0^x \mathrm{d}t = x, \text{ puis } \|T(\mathbb{1})\|_\infty = \sup_{x\in[0\,;\frac{\pi}{2}]} \left|T(\mathbb{1})(x)\right| = \frac{\pi}{2},$$

d'où : $\quad |||T|||_\infty \geqslant \dfrac{\|T(\mathbb{1})\|_\infty}{\|\mathbb{1}\|_\infty} = \dfrac{\pi}{2}$ et $|||T|||_\infty = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Soit $f \in E$, on a :

$$\begin{aligned}\|T(t)\|_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|T(f)(x)\right|\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2}\cdot\|f\|_1,\end{aligned}$$

donc T est continue et $|||T|||_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Par ailleurs, avec la fonction f_n indiquée par l'énoncé :

$$\|f_n\|_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2}{n}} |f_n(t)|\mathrm{d}t)\frac{1}{2}\cdot n\cdot\frac{2}{n} = 1,$$

(aire d'un triangle rectangle).

Ensuite, $\|T(f_n)\|_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|T(f_n)(x)\right|\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left|t(f_n)(x)\right|\mathrm{d}x$,

or pour tout $x \in \left[\frac{2}{n}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $T(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{2}{n}} f_n(t)\mathrm{d}t + 0 = 1$, De plus :

$$\left(||\cos||_2\right)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[t+\tfrac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4},$$

et :

$$\begin{aligned}\left(||T(\cos)||_2\right)^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(T(\cos)(x)\big)^2\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{x} \cos(t)\mathrm{d}t\right)^2 \mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos(2t)\big)\mathrm{d}t\\ &= \tfrac{1}{2}\Big[t-\tfrac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\quad ||\cos||_2 = T(\cos)||_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, et :

$$|||T|||_2 = \sum_{f\in E\setminus\{0\}} \frac{||T(f)||_2}{||f||_2} \geqslant \frac{||T(\cos)||_2}{||\cos||_2} = 1,$$

et donc : $\quad |||T|||_2 = 1.$

donc la fonction $x \mapsto \int_0^1 |K(x,t)|\mathrm{d}t$ de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$, est continue : elle est donc bornée et atteint ses bornes, et par conséquent il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $\int_0^1 |K(c,t)|\mathrm{d}t = \max_{x\in[0\,;1]}\left(\int_0^1 |K(x,t)|\mathrm{d}t\right)$.

Enfin :

$$\begin{aligned}|\varphi(f)(x)|' &= \left|\int_0^1 K(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |K(x,t)|\cdot|f(t)|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \left(\int_0^1 |K(x,t)|\mathrm{d}t\right)\cdot\|f\|_\infty \leqslant \left(\int_0^1 |K(c,t)|\mathrm{d}t\right)\cdot\|f\|_\infty,\end{aligned}$$

d'où : $\quad \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant \left(\int_0^1 |K(c,t)|\mathrm{d}t\right)\cdot\|f\|_\infty$, puis $|||\varphi||| \leqslant \int_0^1 |K(c,t)|\mathrm{d}t$.

2. L'application $\mathbb{1} : \begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & 1\end{array}$ appartient à E, et :

$$|\varphi(\mathbb{1})(0)| = \left|\int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t,$$

puisque $K(c,t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0\,;1]$.

Par conséquent : $\|\varphi(\mathbb{1})\|_\infty \geqslant \int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t$, et comme $\|\mathbb{1}\|_\infty = 1$, alors $|||\varphi||| \geqslant \int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t$.

Comme d'après 1, $|||\varphi||| \leqslant \int_0^1 |K(c,t)|\mathrm{d}t = \int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t$, on peut conclure que $|||\varphi||| = \int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t$.

3. a) On sait que pour toute partie A de E, l'application $d_A : \begin{array}{rcl}E & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & d(x,A)\end{array}$ est continue, et que si A est fermée et $x \notin A$, alors $d(x,A) > 0$.
Ainsi, l'application $g : \begin{array}{rcl}E & \to & [-1\,;1]\\ x & \mapsto & \dfrac{d(x,F_2)-d(x,F_1)}{d(x,F_2)+d(x,F_1)}\end{array}$ est continue,
et $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F_1\\ -1 & \text{si } x \in F_2\end{cases}$.

b) L'application $h : \begin{array}{rcl}[0\,;1] & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & K(c,t)\end{array}$ est continue, donc $F_\varepsilon = h^{-1}([\varepsilon\,;+\infty[)$ et $F_0 = h^{-1}(]-\infty\,;0])$ sont deux parties fermées de E, et il est évident que $F_\varepsilon \cap F_0 = \varnothing$.

Exercice (5). Opérateur de Hardy

Soit $E = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \text{ continue telle que } \int_0^{+\infty} \big(f(t)\big)^2 \mathrm{d}t \text{ converge} \right\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que l'application $||\cdot|| : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} \big(f(t)\big)^2 \mathrm{d}t} \end{array}$ est une norme sur E.

2. a) Pour $f \in E$, on définit l'application :

$$Hf : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Soient $\varepsilon, A \in]0\,;+\infty[$ tels que $\varepsilon < A$. Montrer que :

$$\int_\varepsilon^A \big(Hf(t)\big)^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_0^\varepsilon f(t)\mathrm{d}t\Big)^2 + 2\Big|\int_\varepsilon^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big|,$$

et en déduire que : $\displaystyle\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2 \mathrm{d}t \leqslant 2\Big|\int_0^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big|$.

c) En déduire que : $\displaystyle\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2 \mathrm{d}t \leqslant 4||f||^2$, puis que $Hf \in E$.

d) Montrer que l'application $H : \begin{array}{l} E \to E \\ f \mapsto Hf \end{array}$ est linéaire, continue et que $|||H||| \leqslant 2$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction

$$f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{n} \\ nt - n + 1 & \text{si } 1 - \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \\ t^{-\frac{2n+1}{4n}} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases} \end{array}.$$

Montrer que $||f_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$, et que $||Hf_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{8n}$.
En déduire que $|||H||| = 2$.

continue), donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
De plus, pour tout $x>0$: d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0\,;x[$ tel que $Hf(x)=\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=F'(c_x)=f(c_x)$, qui tend vers $f(0)=Hf(0)$ quand x tend vers 0 (car $0<c_x<x$ et f est continue en 0), donc Hf est continue au point 0.

b) Soient $\varepsilon, A \in]0\,;+\infty[$ tels que $\varepsilon < A$. Alors :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^A \frac{1}{t^2}\Big(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\Big)^2\mathrm{d}t\\ &= \Big[-\frac{1}{t}\big(F(t)\big)^2\Big]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1}{t}\cdot 2F(t)f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(I.P.P.)}\\ &= -\frac{1}{A}\big(F(A)\big)^2 + \frac{\big(F(\varepsilon)\big)^2}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{\big(F(\varepsilon)\big)^2}{\varepsilon} + 2\Big|\int_\varepsilon^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big|.\end{aligned}$$

Or : $\dfrac{\big(F(\varepsilon)\big)^2}{\varepsilon}=\dfrac{F(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot F(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} f(0)\cdot 0 = 0$, donc l'inégalité précédente donne, en passant à la limite quand ε tend vers 0, on obtient :

$$\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant 2\Big|\int_0^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big|.$$

c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $A>0$,

$$\Big|\int_0^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big| \leqslant \sqrt{\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t}\cdot\sqrt{\int_0^A \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t},$$

donc $\displaystyle\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t}\cdot ||f||$; si f est non nulle alors Hf est non nulle, donc si f est non nulle, pour A suffisamment grand, $\displaystyle\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t>0$ puis $\displaystyle\sqrt{\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t}\leqslant 2||f||$,

donc $\displaystyle\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant 4||f||^2$ pour tout réel $A>0$; en passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, on obtient que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t$ converge (et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t\leqslant 4||f||^2$), donc $Hf\in E$.

$$+\left(\frac{8n^2-2n+1}{2n(2n-1)}\right)^2\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$=\frac{16n^2}{(2n-1)^2}\cdot 2n-4\cdot\frac{8n^2-2n+1}{(2n-1)^2}\cdot\frac{4n}{2n+1}+\left(\frac{8n^2-2n+1}{2n(2n-1)}\right)^2$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{16n^2}{(2n-1)^2}\cdot 2n\underset{n\to+\infty}{\sim}8n,$$

et :

$$0\leqslant\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\frac{(nx-n+1)^4}{4n^2x^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}(nx-n+1)^4\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{4(n-1)^2}\left[\frac{(nx-n+1)^5}{5n}\right]_{1-\frac{1}{n}}^{1}$$

$$\leqslant\frac{1}{4(n-1)^2}\cdot\frac{1}{5n}$$

Cette intégrale est donc négligeable devant la précédente quand n tend vers $+\infty$, donc : $||Hf_n||\underset{n\to+\infty}{\sim}8n$, et ainsi : $\dfrac{||Hf_n||}{||f_n||}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$, donc $|||H|||\geqslant 2$, et comme d'après d), on a aussi $|||H|||\leqslant 2$, alors :

$$|||H|||=2.$$

▶ **Corrigé.**

1. a) Pour tout $h \in \mathrm{Ker}(\varphi)$:

$$\big|\varphi(x)\big| = \big|\varphi(x) - \varphi(h)\big| = \big|\varphi(x-h)\big| \leqslant |||\varphi||| \cdot ||x-h||,$$

donc $||x-h|| \geqslant \dfrac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}$, et $d\big(x, \mathrm{Ker}(\varphi)\big) \overset{\text{déf.}}{=} \inf\limits_{h \in \mathrm{Ker}(\varphi)} ||x-h|| \geqslant \dfrac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}$.

b) Soit $\varepsilon \in]0\,; |||\varphi|||[$. Par définition, $|||\varphi||| = \inf\limits_{||x||=1} \big|\varphi(x)\big|$, donc il existe $y \in E$ tel que $||y|| = 1$ et $\big|\varphi(y)\big| > |||\varphi||| - \varepsilon$.

Ensuite avec $h = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \cdot y$: $\quad \varphi(h) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} = 0$

et $||x-h|| = \big|\varphi(x)\big| \cdot \dfrac{||y||}{|\varphi(y)|} = \dfrac{|\varphi(x)|}{|\varphi(y)|} < \dfrac{|\varphi(x)|}{|||\varphi||| - \varepsilon}$,

donc $d\big(x, \mathrm{Ker}(\varphi)\big) < \dfrac{|\varphi(x)|}{|||\varphi||| - \varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, et

donc $d\big(x, \mathrm{Ker}(\varphi)\big) \leqslant \dfrac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}$.

c) Grâce à a) et b), on conclut que $d\big(x, \mathrm{Ker}(\varphi)\big) = \dfrac{|\varphi(x)|}{|||\varphi|||}$,

et en particulier pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$: $\quad |||\varphi||| = \dfrac{|\varphi(a)|}{d\big(a, \mathrm{Ker}(\varphi)\big)}$.

2. a) Soit $r \in]-1\,;1[$, et soit $\theta \in [0\,;2\pi]$:

$$\frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1} = -1 + \frac{2 - 2r\cos(\theta)}{(1 - re^{\mathrm{i}\theta})(1 - re^{-\mathrm{i}\theta})} = -1 + \frac{1}{1 - re^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{1}{1 - re^{-\mathrm{i}\theta}}$$

$$= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{n\mathrm{i}\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{-n\mathrm{i}\theta} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \big(e^{n\mathrm{i}\theta} + e^{-n\mathrm{i}\theta}\big)$$

$$= -1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta).$$

b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$:

$$Q(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(1 + 2\sum_{j=1}^{+\infty} r^j \cos(j\theta)\Big) \cdot \Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Or :

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 = \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k e^{-k\mathrm{i}\theta}\Big) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant \ell \leqslant n}} e^{\mathrm{i}(\ell - k)\theta} x_k x_\ell$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} x_k^2 \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(j\theta) \mathrm{d}\theta}_{=0} \Big) r^j$$

$$+ \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(2 \sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(j\theta) \cos\big((\ell-k)\theta\big) \mathrm{d}\theta x_k x_\ell \Big) r^j.$$

Or : $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(j\theta) \cos\big((\ell-k)\theta\big) \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \ell - k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

d'où : $R = 2 \displaystyle\sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} x_k x_\ell r^{\ell-k}$, puis :

$$Q(X) = \sum_{j=0}^{n} x_j^2 + 2 \sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} r^{\ell-k} x_k x_\ell = {}^{\mathrm{t}}XAX.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_{n+1} = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & r & \cdots & r^n \\ r & 1 & \ddots & r^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r^n & r^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \underset{=}{C_1 - rC_2} \begin{vmatrix} 1-r^2 & r & \cdots & r^n \\ 0 & 1 & & r^{n-1} \\ 0 & r & \ddots & r^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-r^2) \begin{vmatrix} 1 & r & \cdots & r^{n-1} \\ r & 1 & \ddots & r^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1-r^2) D_n$$

$$= \cdots = (1-r^2)^n D_1 = (1-r^2)^n.$$

On en déduit que A est inversible ; de plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$:

$$Q(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} \cdot \Big| \sum_{k=0}^{n} x_k e^{ki\theta} \Big|^2 \mathrm{d}\theta \geqslant 0,$$

donc Q est une forme quadratique définie, positive sur $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, et par conséquent $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

d) L'application g est $(n+1)$-linéaire alternée puisque $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables, et puisque l'application déterminant est $(n+1)$-linéaire alternée sur $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.
On a : $g(e_0, e_1, \ldots, e_n) = \det\Big(\big(\langle e_i, e_j \rangle \big)_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} \Big) = \det(A) = (1-r^2)^n$
car $\langle e_i, e_j \rangle = {}^{\mathrm{t}}e_i A e_j = a_{i,j}$ si on note $A = (a_{i,j})$.