Exemples d'applications de la notion de compacité (Leçon 454)

Exercice (1). Dilatation

Soit (E,d) un espace métrique compact et f une dilatation de E, c'est-à-dire une application $f:\ E\to E$ une application qui vérifie :

$$\forall (x,y)\in E^2,\quad d\big(f(x),f(y)\big)\geqslant d(x,y).$$

1. Soient x,y deux éléments de E.

   Montrer qu'il existe $\varphi:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que les suites $\big(f^{\varphi(n)}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f^{\varphi(n)}(y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans E.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)\big)$.
3. En déduire que $d\big(f(x),f(y)\big)=d(x,y)$.
4. Conclure que f est une isométrie bijective.

▶ **Corrigé.–**

1. Soient x,y deux éléments de E. De la suite $(u_n)=\big(f^n(x),f^n(y)\big)$ d'éléments du compact $E\times E$, on peut extraire une sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $E\times E$: les suites $\big(f^{\varphi(n)}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f^{\varphi(n)}(y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc dans E.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

   $$d\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x),x\big)\leqslant d\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)+1}(x),f(x)\big)\leqslant\cdots\leqslant d\big(f^{\varphi(n+1)}(x),f^{\varphi(n)}(x)\big),$$

   et comme d'après 1 la suite $\big(f^{\varphi(n)}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est de Cauchy, et donc $d\big(f^{\varphi(n+1)}(x),f^{\varphi(n)}(x)\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$

Exercice (2). Théorèmes de point fixe

1. **Théorème du point fixe pour les compacts.**

   Soit (E,d) un espace métrique compat, $f:\ E\to E$ une application qui vérifie :

   $$d\big(f(x),f(y)\big)<d(x,y) \text{ pour tous } x,\ y \text{ de } E \text{ avec } x\neq y.$$

   a) Montrer que f possède un unique point fixe, noté c.

   Indication : on pourra utiliser l'application $g:\ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & d\big(x,f(x)\big) \end{array}$.

   b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

   $$x_0\in E \text{ et pour tout } n\in\mathbb{N},\ x_{n+1}=f(x_n).$$

   Montrer que cette suite converge vers c.

   Indication : montrer que la suite $\big(d(x_n,c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

2. **Théorème de point fixe pour les compacts convexes.**

   Soit C une partie convexe et compacte d'un espace vectoriel normé $(E,||\cdot||)$, et $f:\ C\to C$ une application qui vérifie :

   $$\forall(x,y)\in E^2,\ ||f(x)-f(y)||\leqslant||x-y||.$$

   a) Soit $a\in C$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, montrer que l'application définie sur C par $f_n(x)=\frac{a}{n}+\big(1-\frac{1}{n}\big)f(x)$, possède un unique point fixe.

   b) En déduire que l'application f possède (au moins) un point fixe.

▶ **Corrigé.–**

1. a) Si f possède (au moins) deux points fixes distincts x_1 et x_2, alors : $||x_1-x_2||=||f(x_1)-f(x_2)||<||x_1-x_2||$, ce qui est impossible. Donc f possède au maximum un point fixe.

   L'application $f:\ E\to E$ est 1-lipschitzienne, donc continue sur E. L'application distance $d:\ \begin{array}{rcl} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$ est continue,
   donc $g:\ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & d\big(x,f(x)\big) \end{array}$ est aussi continue, et comme E est un compact, alors $g(E)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}_+$.
   Par conséquent, $g(E)$ possède un plus petit élément $m\in\mathbb{R}_+$, et il existe $c\in E$ tel que $g(c)=m\Leftrightarrow d\big(c,f(c)\big)=m$.
   Si $m>0$, alors $c\neq f(c)$, donc par définition de f :

   $$d\big(f(c),f\big(f(c)\big)\big)<d\big(c,f(c)\big),\ \text{ soit } g\big(f(c)\big)<m,$$

Exercice (3). Théorème de Riesz

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

   a) Montrer que pour tout x de E, il existe $\hat{x} \in F$ tel que :
$$||x-\hat{x}|| = d(x,F).$$

   b) En déduire que si $F \neq E$, alors il existe $u \in F$ tel que $||u|| = 1$ et $d(u,F) = 1$.

   Indication : considérer $x \in E \setminus F$ *et* $u = \dfrac{x-\hat{x}}{||x-\hat{x}||}$.

2. On suppose que E est de dimension infinie ; soit $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ une famille libre infinie de E, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$.

   a) Déduire de 1.b) qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||u_n|| = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ d(u_n, F_{n-1}) = 1.$$

   b) En déduire que pour tous entiers n et p de $\mathbb{N}^*$ avec $n \neq p$, on a $||u_n - u_p|| \geqslant 1$, puis que $B_f(0,1) = \{x \in E\,;\ ||x|| \leqslant 1\}$, la boule unité, n'est pas compacte.

3. Conclure que $B_f(0,1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

▶ **Corrigé.**– Soit donc $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

1. a) Par définition : $d(x,F) = \inf\limits_{y\in F} ||x-y||$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in F$ tel que $d(x,F)`leq||x-y_n|| < d(x,F) + \frac{1}{n}$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$||y_n|| = ||x-(x-y_n)|| \leqslant ||x|| + ||x-y_n|| \leqslant ||x|| + d(x,F) + 1,$$
donc (y_n) est une suite bornée d'éléments de F : comme ce dernier est de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément $\hat{x}$ de F. On a alors :
$$||x-\hat{x}|| = \lim_{n\to+\infty} ||x-y_{\varphi(n)}|| = d(x,F).$$

   b) Soit $x \in E \setminus F$ et $u = \dfrac{x-\hat{x}}{||x-\hat{x}||}$, alors $||u|| = 1$ et, comme $0_E \in F$, alors

Exercice (4). Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $A: I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B: I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonctions continues.
Soit le problème de Cauchy :

$$\text{(C.L.)}\begin{cases} X'(t) & = A(t)X(t)+B(t) \text{ pour tout } t\in I \\ X(t_0) & = X_0 \quad (\text{où } t_0\in I \text{ et } X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ sont donnés.}) \end{cases}.$$

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'une norme $||\cdot||$; on définit aussi, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\quad |||A||| = \sup\limits_{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K});\\ ||X||=1}} ||AX||.$

Pour tout segment $[\alpha\,;\beta]$ inclus dans I, on note $M_{\alpha,\beta} = \max\limits_{t\in[\alpha\,;\beta]} |||A(t)|||$ et $||X||_{[\alpha\,;\beta]} = \max\limits_{t\in[\alpha\,;\beta]} ||X(t)||$.

1. **Unicité.** Soient X et Y deux solutions de (C.L.), soit $t\in I$ et soit $[\alpha\,;\beta]$ un segment inclus dans I qui contient t_0 et t.
   Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$:
   $$||X(t)-Y(t)|| \leqslant \frac{(M_{\alpha,\beta})^p\cdot|t-t_0|^p}{p!}\cdot||X-Y||_{[\alpha\,;\beta]},$$
   et en déduire que $X=Y$.
2. **Existence.**
   a) On suppose que I est un segment $[a\,;b]$, soit $E=\mathcal{C}\big([a\,;b]\,;\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$.
   On munit E de la norme $||\cdot||_{[a\,;b]}$, et on définit pour $X\in E$, l'application $H_X : \begin{array}{rcl} [a\,;b] & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & X_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\big(A(u)X(u)+B(u)\big)\mathrm{d}u \end{array}.$
      i. Justifier que $(E,||\cdot||_{[a\,;b]})$ est un espace de Banach, et que $H_X\in E$.
      ii. Soit l'application $H: \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ X & \mapsto & H_X \end{array}.$
      Montrer que si Y,Z sont des éléments de E et $t\in[a\,;b]$, alors pour tout $p\in\mathbb{N}$:
      $$||H^p(Y)(t)-H^p(Z)(t)|| \leqslant \frac{(M_{[a\,;b]})^p\cdot|t-t_0|^p}{p!}\cdot||Y-Z||_{[a\,;b]},$$
      et en déduire qu'il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que H soit contractante.
      iii. En déduire que H possède un unique point fixe X dans E, et que X est solution de (C.L.).
   b) Traiter le cas où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

ii. Un récurrence très semblable à celle effectuée à la question 1 donne :
si Y, Z sont des éléments de E et $t \in [a\,;b]$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}||H^p(Y)(t) - H^p(Z)(t)|| &\leqslant \frac{\left(M_{[a\,;b]} \cdot |t-t_0|\right)^p}{p!} \cdot ||Y-Z||_{[a\,;b]} \\ &\leqslant \frac{\left(M_{[a\,;b]} \cdot (b-a)\right)^p}{p!} \cdot ||Y-Z||_{[a\,;b]}, \text{ donc}\end{aligned}$$

$$||H^p(Y) - H^p(Z)||_{[a\,,b]} \leqslant \frac{\left(M_{a,b} \cdot (b-a)\right)^p}{p!} \cdot ||Y-Z||_{[a\,,b]}.$$

Or $\dfrac{\left(M_{a,b} \cdot (b-a)\right)^p}{p!} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, donc il existe un entier $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{\left(M_{a,b} \cdot (b-a)\right)^p}{p!} \leqslant \dfrac{1}{2}$, ce qui implique que la fonction H^{p_0} est $\frac{1}{2}$-contractante.

iii. Comme E est un espace complet, d'après le théorème de point fixe de Picard, l'application H admet un unique point fixe dans E. Il existe donc X telle que $X = H_X$, soit :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A(u)X(u) + B(u)\right)\mathrm{d}u,$$

qui donne par dérivation :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{et } X(t_0) = X_0,$$

ce qui fait de X une solution de (C.L.).

b) Pour tout segment J inclus dans I et qui contient t_0, il existe d'après 2.a)iii. une unique solution X_J de (C.L.) sur le segment J.
Définissons alors la fonction $X : \begin{array}{l} I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto X_J(t) \end{array}$, où pour chaque $t \in I$, J est un segmet inclus dans I qui contient t_0 et t.
Cette définition a bien un sens : si $t \in I$ et si J_1 et J_2 sont deux segments inclus dans I qui contiennent t_0 et t, alors il existe, toujours d'après 2.a)iii. une unique solution $\tilde{X}$ de (C.L.) sur le segment $\tilde{J} = J_1 \cap J_2$, et alors :

$$\forall t \in \tilde{J},\ X_{J_1}(t) = \tilde{X}(t) \text{ et } X_{J_2}(t) = \tilde{X}(t), \text{ donc } \forall t \in \tilde{J},\ X_{J_1}(t) = X_{J_2}(t).$$

La fonction X ainsi définie est alors une solution de (C.L.) sur I.

Exercice (6).

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4+y^4-2(x-y)^2 \end{array}$.

1. Montrer que :

$$\exists R>0 \text{ tel que } ||(x,y)||>R \text{ implique } |f(x,y)|>|f(0,0)|+1.$$

2. Montrer que f possède un minimum global, et préciser les points où il est atteint.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4+y^4-2(x-y)^2 = x^4+y^4-2x^2-2y^2+4xy \\ &= x^4-4x^2+4+y^4-4y^2+4+2x^2+2y^2+4xy-8 \\ &= (x^2-2)^2+(y^2-2)^2+2(x+y)^2-8 \\ &\geqslant \left(||(x,y)||^2-2\right)-8 \quad (\text{avec } ||(x,y)||=\max\left(|x|,|y|\right)). \end{aligned}$$

Ansi : $f(x,y) \xrightarrow[||(x,y)||\to+\infty]{} +\infty$, donc il existe bien $R>0$ tel que si $||(x,y)||>R$, alors $f(x,y)>|f(0,0)|+1$.

2. Comme f est continue, alors la restriction de f à la partie compacte $B_f(0,R)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } ||(x,y)||\leqslant R\right\}$ est bornée et atteint ses bornes : on en déduit qu'il existe $(x_0,y_0)\in B_f(0,R)$ tel que $f(x_0,y_0)=\min\limits_{(x,y)\in B_f(0,1)} f(x,y)$.

Comme : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $f(x,y)>|f(0,0)|+1>f(0,0)\geqslant f(x_0,y_0)$, alors $f(x_0,y_0)=\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$.

Or la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc (x_0,y_0) est un point critique de f, vérifiant : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$, soit :

$$\begin{cases} 4x_0^3-4(x_0-y_0) &=0 \\ 4y_0^3+4(x_0-y_0) &=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^3+y_0^3 &=0 \\ x_0^3-x_0+y_0=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-x_0 \\ x_0^3-2x_0=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_0,y_0)\in\left\{(0,0)\,;(\sqrt{2},-\sqrt{2})\,;(-\sqrt{2},\sqrt{2})\right\}.$$

Or $f(0,0)=0$ et $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=f(-\sqrt{2},\sqrt{2})=-8$, donc $\min\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=-8$, et ce minimum est atteint aux deux points $A(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $B(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$n \in \mathbb{N}$.
Hérédité. Pour tout $x \in [0\,;1]$:

$$f^{n+1}(x) - g^{n+1}(x) = f^n\big(f(x)\big) - g^n\big(f(x)\big) + g^n\big(f(x)\big) - g^{n+1}(x)$$
$$\geqslant n\alpha + f\big(g^n(x)\big) - g\big(g^n(x)\big) \geqslant n\alpha + \alpha = (n+1)\alpha.$$

b) Si $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in [0\,;1]$, alors d'après 1 :

$$f^n(x) \geqslant g^n(x) + n\alpha \text{ où } g^n(x) + n\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc $f^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui est impossible puisque f^n est à valeurs dans $[0\,;1]$.
On en déduit qu'il existe $x_1 \in [0\,;1]$ tel que $f(x_1) \leqslant g(x_1)$. De même il existe $x_2 \in [0\,;1]$ tel que $f(x_2) \geqslant g(x_2)$.
Ainsi, la fonction continue $h = f - g$ vérifie : $h(x_1) \leqslant 0$ et $h(x_2) \geqslant 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0\,;1]$ tel que :

$$h(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) = g(c).$$

Exercice (8). Théorème de Heine et deuxième théorème de Dini

1. **Théorème de Heine.**

   Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f :\ [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est uniformément continue sur $[a\,;b]$.
2. **Deuxième théorème de Dini.**

   a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n :\ [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur $[a\,;b]$.
   On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a\,;b]$, vers une fonction continue f.
   Montrer alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a\,;b]$.

   b) Application. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n :\ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\end{array}$.
   Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a\,;a]$ vers la fonction exponentielle.

▶ **Corrigé.–**

1. On raisonne par l'absurde : supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a\,;b]$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in [a\,;b]$ avec $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $\big|f(x_n) - f(y_n)\big| \geqslant \varepsilon$.

$$< \varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon \quad \text{si } k \neq N.$$

Ainsi, $||f_k - f||\infty < 5\varepsilon$ si $k \neq N$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a\,;b]$.

b) Soit $N = E(a)+1$; pour tout entier $n \geqslant N$ et pour tous réels x, y éléments de $[-a\,;a]$ avec $x < y$:

$$0 \leqslant f_n(x) = \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\tfrac{y}{n}\right)^n = f_n(y),$$

et la fonction f_n est croissante sur $[-a\,;a]$.
De plus, pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in [-a\,;a]$:

$$f_n(x) = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n}+o(\frac{1}{n})\right)} = e^{x+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x.$$

D'après le théorème de Dini, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-a\,;a]$ vers la fonction exponentielle.