Groupes et géométrie

Exercice 1 : la formule de Burnside.

Références : [Combes, Gourdon, Skandalis...]

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Si $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de g.

1. Montrer que le nombre N d'orbites de l'action est la moyenne du nombre de points fixes des éléments de G :
$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$
Indication : calculer de deux manières différentes le cardinal de l'ensemble $E = \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$.
2. Applications :
   (a) Quel est le nombre moyen des points fixes d'une permutation aléatoire de S_n ? (Remarque : la méthode standard pour calculer cette moyenne est d'utiliser la linéarité de l'espérance et de calculer la loi des variables aléatoires X_k, $k \in \{1, ..., n\}$, valant 1 si k est fixe par la permutation et 0 sinon.)
   (b) Retrouver à l'aide de la formule de Burnside que si un groupe fini G agit transitivement sur un ensemble X de cardinal au moins 2, alors il existe un élément de G qui ne fixe aucun point de X. En déduire que si H est un sous-groupe strict de G, alors $\cup_{g \in G} gHg^{-1} \neq G$.

Application : la formule de Burnside a deux applications classiques à l'oral de l'agrégation, le nombre de colliers de perles de couleurs prescrites et le nombre de coloriages d'un cube (traité ci-dessous).
Une référence pour le collier de perle :
Combes : Algèbre et Géométrie, exercice 2 p.44 et ex. 2-2 p.50.
Des références pour le cube :
Eric Lehman, *Mathématiques pour l'étudiant de première année. Algèbre et géométrie*, Sec. 4.3
Philippe Caldero, Marie Peronnier, *Carnet de voyage en Algébrie*, 2019, p.141-142.
Peter M. Neumann, Gabrielle A. Story, E. C. Thompson, *Groups and Geometry.*

Exercice 2 : le groupe d'isométrie du cube.

Références pour le groupe du cube : [Caldero-Peronnier], pour le coloriage du cube : [Lehman], [Caldero-Peronnier], [Neumann et al] cités ci-dessus.

Cet exercice étudie la struture du groupe des isométries du cube puis donne une application de ce groupe au dénombrement des coloriages des faces d'un cube. Nous commençons par étudier quelques exemples de groupes d'isométrie de parties du plan et quelques propriétés générales des groupes d'isométrie.

Si E est un espace (affine ou vectoriel) euclidien et X est une partie de E, on appelle *groupe d'isométrie de* X l'ensemble $\mathrm{Is}\,(X)$ des isométries (affines ou linéaires) laissant X invariant, c'est-à-dire les isométries $f \in O(E)$ telles que $f(X) = X$. On vérifie facilement que c'est un groupe. On appelle *groupe d'isométrie positive (ou directe) de* X le sous-groupe $\mathrm{Is}^+(X)$ de $\mathrm{Is}\,(X)$ formé des isométries directes laissant X invariant.

1. (a) Dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère les parties suivantes :

$$A = \mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1),\ B = \{(-1,0),(1,0)\},\ C = \{(\pm 1,0), \pm(1,1)\}$$
$$D = \{(\pm 1, \pm 2)\},\ E = \{(\pm 1, \pm 1)\}.$$

   Déterminer les groupes d'isométrie $\mathrm{Is}\,(A)$, $\mathrm{Is}\,(B)$, $\mathrm{Is}\,(C)$, $\mathrm{Is}\,(D)$, $\mathrm{Is}\,(E)$ et leurs sous-groupes des isométries directes.

   (b) Donner une partie F du plan telle que $\mathrm{Is}\,(F) = \mathrm{Is}^+(F) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
2. Si X est une partie d'un espace euclidien E, montrer que $\mathrm{Is}^+(X)$ est un sous-groupe distingué d'indice 1 ou 2 de $\mathrm{Is}\,(X)$ et que si E est un espace vectoriel de dimension impaire et X est une partie de E symétrique par rapport à 0, alors $\mathrm{Is}\,(X) \simeq \mathrm{Is}^+(X) \times \{\pm \mathrm{id}\}$.

On considère maintenant un cube X dans un espace affine euclidien de dimension 3 (indication : on pourra supposer que le cube est formé des sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique). Le cube pourra désigner au choix l'ensemble des sommets ou l'enveloppe convexe de ces sommets.

3. Montrer que les groupes $\mathrm{Is}^+(X)$ et $\mathrm{Is}\,(X)$ fixent le centre du cube.
4. En faisant agir le groupe d'isométrie du cube sur des ensembles géométriques associés au cube, construire des morphismes de $\mathrm{Is}\,(X)$ dans $\mathcal{S}_{12}$, $\mathcal{S}_8$ et $\mathcal{S}_6$. Déterminer leurs noyaux.
5. Montrer qu'il y a exactement 4 paires de sommets réalisant le diamètre du cube, les paires de sommets diamétralement opposés.
6. En déduire des morphismes de $\mathrm{Is}^+(X)$ et $\mathrm{Is}\,(X)$ dans $\mathcal{S}_4$. Montrer que ces morphismes sont surjectifs (indication : on utilisera un système de générateurs de $\mathcal{S}_4$).
7. En utilisant la matrice des isométries dans différentes bases associées aux sommets du cube, déterminer le noyau de ces morphismes.
8. En déduire que $\mathrm{Is}^+(X) \simeq \mathcal{S}_4$ et $\mathrm{Is}\,(X) \simeq \mathcal{S}_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer tous les éléments de ces groupes.
9. En utilisant la formule de Burnside, déterminer le nombre de cubes différents qu'on peut obtenir en coloriant les faces d'un cube à l'aide de (au plus) trois couleurs (les cubes sont considérés identiques si on peut passer de l'un à l'autre par une isométrie directe).

Exercice 3 : le groupe $\mathbb{H}_8$ des quaternions.

On considère le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les éléments suivants :

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbb{H}_8$ ce groupe.

1. Déterminer I^2, J^2, K^2, IJ.
2. En déduire que le groupe $\mathbb{H}_8$ possède 8 éléments.

3. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{H}_8$. Sont-ils distingués ? Le groupe $\mathbb{H}_8$ est-il abélien ?
4. Montrer que les groupes $\mathbb{H}_8$, D_4, $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont tous de cardinal 8 mais sont deux à deux non isomorphes.

Exercice 4 : la structure du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ caractérise la dimension n.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et n un entier. Dans cet exercice, on montre que n se retrouve dans les propriétés du groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'une matrice A d'ordre 2 dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable.
2. Montrer que deux matrices A, B d'ordre 2 de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ commutent si et seulement si AB est d'ordre 2.
3. En déduire le cardinal maximal d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont d'ordre 2. Indication : on utilisera le fait que des endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux sont diagonalisables dans une même base.
4. En déduire que pour tout entier m, si $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \simeq \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ alors $m = n$.
5. Peut-on conclure de même pour $\mathbb{K}$ un corps fini de caractéristique 2 ? (indication : on peut utiliser l'exercice suivant.)

Exercice 5 : des groupes linéaires sur des corps finis.

Soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments (unique à isomorphisme près et dont un exemplaire est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).
On note $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_p)$ le groupe linéaire du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel $\mathbb{F}_p^k$. On l'identifie au groupe des matrices $k \times k$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. On note $\mathrm{SL}_k(\mathbb{F}_p)$ le sous-groupe du groupe linéaire $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_p)$ formé des matrices de déterminant 1.

1. Pourquoi $\mathrm{SL}_k(\mathbb{F}_p)$ est-il un sous-groupe de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_p)$? Quel est son indice ?
2. Montrer qu'il y a $(p^k - 1)(p^k - p)...(p^k - p^{k-1})$ bases dans $\mathbb{F}_p^k$.
3. En déduire le cardinal de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{F}_p)$ (indication : une application linéaire est inversible si et seulement si elle envoie une base sur une base) et de $\mathrm{SL}_k(\mathbb{F}_p)$.
4. Montrer qu'il y a $p + 1$ droites vectorielles dans $\mathbb{F}_p^2$.
5. En faisant agir le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ sur l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{F}_2^2$, montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$.
6. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p)$ ayant des 1 sur la diagonale :
$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_p) \right\}$$
est un groupe de cardinal p^3 non abélien. Quel est son centre ?

Remarque : dans la feuille d'exercice précédente, on a montré que le centre d'un groupe de cardinal une puissance d'un nombre premier p est non trivial, et que les groupes de cardinal p^2 sont abéliens.

Exercice 6 : générateurs du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Référence : [Francinou et al., X-ENS, algèbre 2] exercice 3.15.

On rappelle que

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z}) \mid ad - bc = 1\}$$

est un sous-groupe distingué du groupe multiplicatif $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de l'anneau $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$.
Dans cet exercice, une matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ sera notée $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix}$ si L_1, L_2 sont les lignes de A et C_1, C_2 sont les colonnes de A.
Le but de l'exercice est de donner des petits systèmes générateurs du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. On note :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par T et U, ainsi que par S et T. On note G le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par T et U.

1. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ sont dans G.
2. Montrer que pour toute matrice $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ et tout entier $k \in \mathbb{Z}$, on a l'équivalence entre les propriétés suivantes :

   (a) $A \in G$ $\quad$ (b) $\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 + kL_1 \end{pmatrix} \in G$ $\quad$ (c) $\begin{pmatrix} L_1 + kL_2 \\ L_2 \end{pmatrix} \in G$

   (d) $\begin{pmatrix} C_1 & C_2 + kC_1 \end{pmatrix} \in G$ $\quad$ (e) $\begin{pmatrix} C_1 + kC_2 & C_2 \end{pmatrix} \in G$

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.
   (a) Montrer que a et c sont premiers entre eux.
   (b) Soit $a = cq + r$ la division euclidienne de a par c, avec $0 \leq r < |c|$. Montrer que $A \in G$ si et seulement si une certaine matrice (à préciser) de la forme $\begin{pmatrix} r & * \\ c & * \end{pmatrix}$ appartient à G.
   (c) En déduire grâce à l'algorithme de la division euclidienne que $A \in G$. Conclure.
4. Écrire les matrices $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 21 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 10 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ comme produit des éléments T, U, T^{-1} et U^{-1}.
5. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par S et T.

Remarque : le devoir d'algèbre des vacances d'été montrait également que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par S et T. Cela résultait de l'étude d'une action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ par homographie complexe sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$.