

Formes quadratiques, classification, groupes orthogonaux.

Ce problème, fondé sur le sujet de concours X-ENS 2014 MP, porte sur l'étude des formes quadratiques et des groupes d'isométries associés.

Notations, Définitions

Dans tout ce problème, n désigne un entier non nul et \mathbb{K} désigne un corps de caractéristique différente de 2, c'est-à-dire un corps tel que $1 + 1 \neq 0$ dans \mathbb{K} , où 1 désigne l'unité de la loi multiplicative de \mathbb{K} .

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . On rappelle les points suivants.

- Une *forme bilinéaire symétrique* sur V est une application $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $b(x, y) = b(y, x)$ et $b(x + \lambda y, z) = b(x, z) + \lambda b(y, z)$ pour tous $x, y, z \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Si b est une forme bilinéaire symétrique sur V , deux vecteurs $x, y \in V$ sont dits *orthogonaux pour b* , ou *b -orthogonaux*, ou *orthogonaux* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la forme bilinéaire, si $b(x, y) = 0$. Deux sous-espaces vectoriels W, W' de V sont dits *orthogonaux (pour b)* si tout vecteur de W est orthogonal (pour b) à tout vecteur de W' .

- Une *forme quadratique* sur V est une application $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

(i) $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $v \in V$;

(ii) l'application $\tilde{q} : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $(x, y) \mapsto \tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$ est bilinéaire symétrique.

- Une forme quadratique est dite *non dégénérée* si, pour tout $v \in V \setminus \{0\}$, il existe $w \in V$ tel que $q(v, w) \neq 0$.

On notera $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble des formes quadratiques *non dégénérées* sur V .

- Soit $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de V . On associe à toute forme bilinéaire symétrique b sur V la matrice symétrique $\Phi_{\mathcal{B}}(b) := (b(e_i, e_j))_{i,j=1..n}$ appelée *matrice de b dans la base \mathcal{B}* . On rappelle que $b \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}(b)$ est un isomorphisme entre l'espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur V et celui des matrices symétriques carrées de taille n .

Soient V et V' deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, q et q' deux formes quadratiques sur V et V' .

- Une *isométrie* entre q et q' est un isomorphisme linéaire $f : V \rightarrow V'$ tel que $q' \circ f = q$. On notera $q \cong q'$ si q et q' sont isométriques, c'est-à-dire s'il existe une isométrie entre q et q' . La relation \cong est une relation d'équivalence sur l'ensemble des formes quadratiques sur V .

On notera $\mathcal{O}(q) := \{f \in \mathcal{GL}(V) \mid q \circ f = q\}$ le sous ensemble de $\mathcal{GL}(V)$ formé des isométries $f : V \rightarrow V$ entre q et elle-même.

I. Préliminaires sur les formes quadratiques et les isométries

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n .

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. On note $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ la forme quadratique q définie sur \mathbb{K}^n par la formule :

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2.$$

1. Montrer que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est bien une forme quadratique sur \mathbb{K}^n .

Rédiger rapidement ces questions, en reprenant la définition donnée dans l'introduction.

2. Montrer que l'application $q \mapsto \tilde{q}$ est une bijection de l'ensemble des formes quadratiques sur V sur l'ensemble des formes bilinéaires *symétriques* sur V .

On cherche la réciproque, donc on cherche à associer une forme quadratique à une forme bilinéaire symétrique. Cela se fait avec la définition classique d'une forme quadratique : si b est une forme bilinéaire symétrique, la forme quadratique associée est $q|_b : x \mapsto b(x, x)$. Il reste à vérifier que les deux applications sont réciproques l'une de l'autre.

3. Soient V et V' deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, q, q' deux formes quadratiques sur V et V' . On note $q \oplus q' : V \times V' \rightarrow \mathbb{K}$ l'application définie par $q \oplus q'(v, v') = q(v) + q'(v')$.
 - a. Montrer que $q \oplus q'$ est une forme quadratique sur $V \times V'$.
 - b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $V \times \{0\}$ et $\{0\} \times V'$ sont orthogonaux pour $q \oplus q'$.
 - c. Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases de V et V' , exprimer la matrice $\Phi_{(\mathcal{B}, \mathcal{B}')} (q \oplus q')$ en fonction des matrices $\Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})$ et $\Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{q}')$ où $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ désigne la base de $V \times V'$ formée de la concaténation des deux familles $\mathcal{B} \times \{0\}$ et $\{0\} \times \mathcal{B}'$.

L'opération \oplus est aussi appelée somme orthogonale. Si un espace vectoriel V est muni d'une forme quadratique q et si V est la somme \tilde{q} -orthogonale de deux sous-espaces W et W' , alors q est isométrique à $q|_W \oplus q|_{W'}$ (exercice, utile plus loin).

4. a. Montrer qu'une forme quadratique q sur V est non dégénérée si et seulement si le déterminant $\det \Phi_{\mathcal{B}}(\tilde{q})$ est non nul pour toute base \mathcal{B} de V .

Utiliser les définitions et la formule matricielle ${}^t X.S.Y$ pour exprimer $\tilde{q}(x, y) = 0$.

- b. Quelle est la matrice de $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dans la base canonique de \mathbb{K}_n ? En déduire une condition sur a_1, \dots, a_n pour que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathcal{Q}(\mathbb{K}^n)$.

Soient V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, q une forme quadratique sur V .

5. Soit $x \in V \setminus \{0\}$. On note $\{x\}^\perp := \{y \in V \mid \tilde{q}(x, y) = 0\}$.

- a. Montrer que $\{x\}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V de dimension $n - 1$ ou n .

Penser à une forme linéaire.

- b. A quelle condition sur x le sous-espace $\{x\}^\perp$ est-il un supplémentaire de la droite $\mathbb{K}x$ dans V ?

6. On note $V^\perp = \{v \in V \mid \forall w \in V, \tilde{q}(v, w) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de V , appelé "noyau" ou "radical" de q .

- a. Montrer que le rang de la matrice de q dans une base de V ne dépend pas de la base de V (on pourra utiliser les formules de changement de base des formes quadratiques).

On appelle ce nombre le *rang de q* .

- b. Montrer que pour tout supplémentaire W de V^\perp dans V , l'application $q|_W$ est une forme quadratique non dégénérée sur W .

Utiliser les définitions.

- c. En déduire que si q est de rang r , alors q est isométrique à une forme quadratique $0 \oplus q_0$ où 0 désigne la forme quadratique nulle sur \mathbb{K}^{n-r} et q_0 est une forme quadratique non dégénérée.

Utiliser la remarque après la question 3.

7. Soient V et V' deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $q' \in \mathcal{Q}(V')$.

- a. Montrer que $q \cong q'$ si et seulement si il existe une base de V et une base de V' telles que les matrices de q et q' dans ces bases soient égales.

Ecrire les définitions et les objets cherchés (base ou isométrie) seront évidents.

- b. Montrer que $\mathcal{O}(q)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(V)$ et que si $q \cong q'$, alors $\mathcal{O}(q)$ et $\mathcal{O}(q')$ sont deux groupes isomorphes.

L'isomorphisme entre $\mathcal{O}(q)$ et $\mathcal{O}(q')$ résulte de la bijection de (V, q) sur (V', q') , qui conjugue les deux groupes. C'est une situation classique, à illustrer et comprendre avec le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \rightarrow & V' \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ V & \rightarrow & V' \\ & f & \end{array}$$

où g et g' sont deux isométries conjuguées (trouver la formule les reliant et l'appliquer aux groupes).

On appelle $\mathcal{O}(q)$ le groupe orthogonal de q .

II. Existence des bases orthogonales.

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soit q une forme quadratique sur V . On dit que q est *isotrope* s'il existe $x \in V \setminus \{0\}$ tel que $q(x) = 0$. Dans le cas contraire, on dit que q est *anisotrope*.

8. On suppose dans cette question que $q \in Q(V)$.

a. Montrer qu'il existe $x \in V$ tel que $q(x) \neq 0$.

b. On note h la forme quadratique sur \mathbb{K}^2 définie par $h(x_1, x_2) = x_1 x_2$ (on ne demande pas de vérifier que h est une forme quadratique). Montrer que si V est de dimension deux et q est isotrope alors q est isométrique à h .

Il faut trouver une base de V dans laquelle la matrice de q est celle de h dans la base canonique de \mathbb{K}^2 . Pour cela on prend pour premier vecteur de base un vecteur isotrope et on cherche un deuxième vecteur isotrope qui ne lui soit pas orthogonal.

Remarque : tous les \mathbb{K} -plans vectoriels munis d'une forme quadratique non dégénérée isotrope sont donc isomorphes, on les appelle *plans hyperboliques* (sur \mathbb{K}).

c. Montrer que si q est isotrope, alors $q : V \rightarrow \mathbb{K}$ est surjective.

Noter que ce n'est pas forcément le cas pour une forme anisotrope (sur \mathbb{R} on dit aussi une forme définie). Ainsi, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la forme quadratique $x \mapsto x^2$ sur $V = \mathbb{R}$ est non dégénérée et non surjective (elle ne prend que des valeurs positives). On verra des exemples plus loin sur les corps finis.

9. Une base (e_1, \dots, e_n) de V est dite *orthogonale* pour q si $\tilde{q}(e_i, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

a. En utilisant les questions 5b, 6c et 8a, montrer qu'il existe une base orthogonale pour q .

b. En déduire qu'il existe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $q \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Comprendre et savoir qu'une base est b -orthogonale si et seulement si la matrice de b dans cette base est diagonale.

c. Donner une base orthogonale de \mathbb{K}^2 pour h .

Il est même intéressant de comprendre (par le calcul, puis faire un dessin sur \mathbb{R}^2) toutes les bases orthogonales pour h . Constater que dans le cas réel, il y a des bases (en nombre fini) qui sont à la fois orthogonales pour h et orthonormées pour le produit scalaire usuel. C'est une conséquence bien connue du théorème spectral ("Réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles dont l'une est définie positive", paragraphe 6.1 du programme de l'agrégation interne).

III. Classification des formes quadratiques sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

10. (Classification des formes quadratiques sur \mathbb{C})

- a. Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que q est isométrique à la forme quadratique $\langle 1, \dots, 1 \rangle$.

L'idée ici et plus loin est d'orthogonaliser la forme quadratique, donc se ramener (par isométrie) à une forme $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, puis de multiplier les vecteurs de base par un scalaire pour les "normaliser". Sur le corps \mathbb{R} et pour un produit scalaire b de forme quadratique q , on normalise un vecteur x non nul en le divisant par sa norme, qui est $\|x\| = \sqrt{q(x)}$. C'est possible parce que $q(x) > 0$. Sur un corps quelconque et pour une forme quadratique quelconque, les coefficients a_i n'ont pas forcément de racine carrée. On voit que classifier les formes quadratiques sur un corps \mathbb{K} nécessite de comprendre le groupe quotient $\mathbb{K}^/\mathbb{K}^{*2}$ (voir question 12.a).*

- b. Montrer qu'il y a $n+1$ classes d'isométrie de formes quadratiques sur un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n .

Dit avec le vocabulaire de la question 3, une forme quadratique quelconque se voit comme la somme orthogonale de la forme nulle et d'une forme non dégénérée. Dit matriciellement, on se ramène à la forme $\langle a_1, \dots, a_r, 0, \dots, 0 \rangle$ où les a_i sont tous non nuls.

11. (Classification des formes quadratiques sur \mathbb{R})

- a. Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe un unique couple d'entiers (r, s) , avec $r + s = n$, tel que q soit isométrique à la forme quadratique $Q_{r,s}$ définie sur la base canonique de \mathbb{R}^n par :

$$Q_{r,s}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r x_i^2 - \sum_{i=r+1}^n x_i^2.$$

C'est la classique loi d'inertie de Sylvester (mais prendre cette question comme une question de cours). Inutile de refaire la théorie comme dans les livres ici. Pour l'existence, on part d'une base orthogonale et on "normalise", comme expliqué au-dessus, les vecteurs de base pour que la forme quadratique prenne les valeurs 1, -1 ou 0 en ces vecteurs. Pour l'unicité, imaginer que q soit isométrique à deux formes $Q_{r,s}$ et $Q_{r',s'}$ avec $r < r'$ par exemple, et trouver la contradiction avec un espace de dimension r et un espace de dimension s' en somme directe (impossible car $r + s' > n$).

- b. Combien y a-t-il de classes d'isométrie de formes quadratiques sur un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n ?

Une petite question d'énumération en passant.

IV. Classification des formes quadratiques sur un corps fini.

Soit \mathbb{F}_k un corps fini de cardinal k . On suppose que le corps \mathbb{F}_k n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire que k n'est pas une puissance de 2.

12. a. Montrer que $\mathbb{F}_k^{*2} := \{x^2, x \in \mathbb{F}_k^*\}$ est un sous-groupe de \mathbb{F}_k^* de cardinal $\frac{k-1}{2}$.

Penser à un morphisme de groupe. Le théorème d'isomorphisme permet d'identifier $\mathbb{F}_k^/\mathbb{F}_k^{*2}$, donc l'indice de \mathbb{F}_k^{*2} et son cardinal.*

- b. En déduire que pour tout $a, b \in \mathbb{F}_k^*$ et tout $c \in \mathbb{F}_k$, l'équation $ax^2 + by^2 = c$ possède au moins une solution $(x, y) \in \mathbb{F}_k$.

On fixe $\alpha \in \mathbb{F}_k \setminus \mathbb{F}_k^2$.

13. Soit V un \mathbb{F}_k -espace vectoriel de dimension finie, q une forme quadratique sur V .

- a. Montrer que si $n \geq 2$, alors q est isotrope.
 b. Montrer que $q(V)$ vaut $\{0\}$, \mathbb{F}_k^2 , $\alpha\mathbb{F}_k^2$ ou \mathbb{F}_k .

Remarque : on retrouve une situation analogue au corps des réels, pour lequel l'image d'une forme quadratique est $\{0\}$, \mathbb{R}^+ , \mathbb{R}^- ou \mathbb{R} . En général la situation peut être plus simple (comme sur le corps \mathbb{C}) ou plus compliquée (sur le corps \mathbb{Q} par exemple).

14. (Classification des formes quadratiques sur \mathbb{F}_k)

- a. Soit $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{F}_k^n)$, avec $n \geq 1$. Montrer que q est isométrique à $\langle 1, \dots, 1 \rangle$ ou à $\langle 1, \dots, 1, \alpha \rangle$ et que ces deux formes quadratiques ne sont pas isométriques.

Traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$ puis faire une récurrence.

- b. Combien y a-t-il de classes d'isométrie de formes quadratiques sur un \mathbb{F}_k -espace vectoriel de dimension n ?

V. Quelques propriétés de $\mathcal{O}(q)$ quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On suppose dans cette partie que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

On note $j : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'isomorphisme linéaire qui à tout endomorphisme associe sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n . On note $\mathcal{O}_{r,s} := j(\mathcal{O}(Q_{r,s}))$ le sous-ensemble de matrices associé au groupe orthogonal $\mathcal{O}(Q_{r,s})$ de $\mathcal{Q}_{r,s}$.

15. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire et $M = j(f)$ sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Montrer que $M \in \mathcal{O}_{r,s}$ si et seulement si ${}^t M I_{r,s} M = I_{r,s}$ où $I_{r,s}$ est la matrice de $Q_{r,s}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Que peut-on dire du déterminant $\det(M)$ de M si $M \in \mathcal{O}_{r,s}$?
16. Montrer que $\mathcal{O}_{r,s}$ est un sous-groupe fermé de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ (on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie de \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie).

17. On note $\mathcal{O}(n)$ le groupe orthogonal usuel de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire $\mathcal{O}(n) = \mathcal{O}_{n,0}$. On note $K_{r,s} := \mathcal{O}_{r,s} \cap \mathcal{O}(n)$. Montrer que $K_{r,s}$ est compact et en bijection avec $\mathcal{O}(r) \times \mathcal{O}(s)$.
18. Montrer que $\mathcal{O}_{1,1}$ n'est pas compact.

On peut déterminer tous les éléments de $\mathcal{O}_{1,1}$.