Dualité et formes quadratiques.

Prérecquis sur les formes linéaires, bilinéaires symétriques et quadratiques.

Doivent être travaillés et connus (partie 5.6 et 5.9 du programme du concours) :

— La notion de forme linéaire, le lien avec les hyperplans, les systèmes d'équations linéaires et les sous-espaces vectoriels.

— la définition d'une forme bilinéaire et d'une forme quadratique dans un espace vectoriel (sur un corps quelconque de caractéristique différente de 2).

— la matrice d'une forme bilinéaire/quadratique et la formule de changement de bases.

— L'existence d'une base orthogonale pour une forme bilinéaire/quadratique et l'algorithme de Gauss pour trouver une telle base. En particulier il faut connaître le lien entre changements de base, changements de coordonnées, formes linéaires, bases duales, bases antéduales, ainsi que des principes généraux de dualité.

— La définition du rang, du noyau et du cone isotrope d'une forme bilinéaire/quadratique.

— Dans le cas réel, la signature d'une forme bilinéaire/quadratique et la loi d'inertie de Sylvester.

— Dans un espace euclidien, l'existence d'une base orthogonale pour une forme bilinéaire/quadratique qui est orthonormée pour le produit scalaire de l'espace euclidien.

— Les liens entre les quadriques (coniques en dimension 2) et les formes quadratiques.

Ces notions sont travaillées dans cette feuille. Les exercices 1 à 10 concernent les formes linéaires et la dualité. Les exercices 11 à 15 concernent les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques.

Notations.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'espace dual E^* de E est l'ensemble des formes linéaires sur E, c'est-à-dire des applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (structure héritée de la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de l'espace d'arrivée, c'est-à-dire de $\mathbb{K}$). Si F est une partie de E^*, on note ${}^\circ F = \{x \in E \mid \forall u \in F,\ u(x) = 0\}$. On l'appelle l'orthogonal de F (au sens de la dualité), c'est un sous-espace vectoriel de E. Si F est une partie de E, on note $F^\circ = \{u \in E^* \mid \forall x \in F,\ u(x) = 0\}$. On l'appelle l'orthogonal de F (au sens de la dualité), c'est un sous-espace vectoriel de E^*.

$\boxed{\textbf{Rappel de dualité.}}$

Sous-espaces vectoriels et systèmes d'équations linéaires - Un hyperplan d'un espace vectoriel est le noyau d'une forme linéaire. Par exemple l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$:

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$$

est le noyau de la forme linéaire $\phi_1 : (x, y, z) \mapsto x + y - z$ sur $\mathbb{R}^3$.

En dimension finie, un sous-espace vectoriel peut se définir comme une intersection d'hyperplans, donc comme l'ensemble des vecteurs qui annulent un ensemble de formes linéaires. Par exemple le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0,\ x + 2z = 0\}$$

est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui annulent les formes $\phi_1 : (x, y, z) \mapsto x + y - z$ et $\phi_2 : (x, y, z) \mapsto x + 2z$.

Le sous-espace F est aussi l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui annulent toutes les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ de la forme $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (combinaisons linéaires des équations). Ainsi F est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui annulent toutes les formes linéaires du sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}\,(\phi_1, \phi_2)$ de $(\mathbb{R}^3)^*$. En terme d'orthogonalité (au sens de la dualité), cela s'écrit ainsi :

$$F = {}^\circ\mathrm{vect}\,(\phi_1, \phi_2).$$

Cette formule exprime une correspondance (à la base de la notion de dualité) entre les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel et les sous-espaces vectoriels de son dual.

En dimension finie, les trois présentations suivantes d'un sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E sont équivalentes :

- $F = H_1 \cap ... \cap H_k = \ker u_1 \cap ... \cap \ker u_k$ intersection d'hyperplans
- $F = \{x \in E \mid u_1(x) = 0, ..., u_k(x) = 0\}$ ensemble des solutions d'un système de k équations linéaires à $\dim E$ inconnues.
- $F = \{u_1, ..., u_k\}^\circ = (\mathrm{vect}\,(u_1, ..., u_k))^\circ$ orthogonal d'une partie ou d'un sous-espace vectoriel de E^*.

Le lien entre dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire et nombre d'équations indépendantes est un résultat de dualité (exercice 10) : la dimension d'un sous-espace vectoriel de E est la codimension de son orthogonal dans E^*, c'est-à-dire du sous-espace vectoriel de E^* engendré par les formes linéaires définies par les équations du système.

Bases duales et antéduales - En toute dimension, la famille duale d'une base d'un espace vectoriel est une famille libre. En dimension finie, cette famille engendre le dual et en est donc une base (exercice 2). En dimension infinie, ce n'est jamais le cas (exercice 5).

En toute dimension, il y a une injection canonique de E dans son bidual E^{**} (exercice 3). En dimension finie, cette injection est un isomorphisme, parce que E et E^{**} ont même dimension que E^*. On peut parler d'"identification" canonique entre E et son bidual. Cet isomorphisme entre E et E^{**} en dimension finie permet de voir que toute base de E^* est la base duale d'une base de E (exercice 2).

Isomorphismes entre E et E^* - Notons qu'il n'y a pas, en dimension finie, d'isomorphisme canonique entre E et E^*. La donnée d'un tel isomorphisme correspond exactement à la donnée d'une forme bilinéaire non dégénérée sur E (exercice 15) : à un isomorphisme ϕ de E sur E^* correspond la forme bilinéaire $(x, y) \mapsto \phi(x)(y)$ et à une forme bilinéaire b sur E correspond le morphisme $x \mapsto (y \mapsto b(x, y))$ qui est un isomorphisme si la forme b est non dégénérée. Cette correspondance induit un isomorphisme (canonique) entre $\mathrm{Hom}(E, E^*)$ et $\mathrm{Bilin}(E)$ (utilisée par exemple en calcul différentiel pour la différentielle seconde).

Principes généraux de dualité - En dimension finie on a vu une correspondance bijective entre bases de E et bases de E^* :

$$\{\text{bases de } E\ \} \rightleftharpoons \{\text{bases de } E^*\ \}$$

Ce qu'on appelle la dualité concerne essentiellement l'étude de la correspondance entre les sous-espaces vectoriels de E et ceux de E^*, définie par l'orthogonalité (exercice 7) : à toute partie A de E correspond la partie A° de E^* des formes linéaires s'annulant sur A. À toute partie B de E^* correspond la partie ${}^\circ B$ de E des vecteurs de E sur lesquels toutes les formes de B s'annulent (les “zéros” de B). On vérifie facilement que A° et ${}^\circ B$ sont des sous-espaces vectoriels.

L'orthogonalité établit ainsi une correspondance entre les sous-espaces vectoriels de E et de E^*.

$$\{\text{sous-espaces vectoriels de } E\ \} \overset{\circ}{\underset{\circ}{\rightleftharpoons}} \{\text{sous-espaces vectoriels de } E^*\ \}$$

$$\begin{array}{c} A \to A^\circ \\ {}^\circ A \leftarrow A \end{array}$$

Exemple : un hyperplan H de E correspond (“par dualité”) à une droite de E^* : si H est le noyau de la forme linéaire u, alors $H^\circ = \mathrm{vect}\,(u)$ et $H = {}^\circ\mathrm{vect}\,(u)$.

En dimension finie, cette correspondance entre les sous-espaces vectoriels de E et de E^* “fonctionne bien”, au sens où elle est bijective, les relations d'orthogonalité étant inverses l'une de l'autre (exercice 6).

$$\{\text{sous-espaces vectoriels de } E\ \} \overset{\circ}{\underset{\circ}{\rightleftharpoons}} \{\text{sous-espaces vectoriels de } E^*\ \}$$

$$\begin{array}{rcl} {}^\circ(A^\circ) = A & \rightleftharpoons & A^\circ \\ {}^\circ A & \rightleftharpoons & A = ({}^\circ A)^\circ \end{array}$$

Toujours en dimension finie, les propriétés suivantes sont fondamentales :

$$\{\text{sous-espaces vectoriels de } E\ \} \overset{\circ}{\underset{\circ}{\rightleftharpoons}} \{\text{sous-espaces vectoriels de } E^*\ \}$$

$$A \subset B \rightleftharpoons B^\circ \subset A^\circ$$

$$\dim A = k \ \rightleftharpoons \mathrm{codim} A^\circ = k$$

$$\begin{array}{rcl} A \cap B & \rightleftharpoons & A^\circ + B^\circ \\ A + B & \rightleftharpoons & A^\circ \cap B^\circ \\ E = A \oplus B & \rightleftharpoons & E^* = A^\circ \oplus B^\circ \\ E = {}^\circ A \oplus {}^\circ B & \rightleftharpoons & E^* = A \oplus B \end{array}$$

Certaines de ces propriétés sont vraies en dimension infinie, la plupart résultent immédiatement des définitions. D'autres sont spécifiques à la dimension finie. La deuxième propriété exprime que l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire à p équations indépendantes et n inconnues est de dimension $n-p$, ou dualement qu'un sous-espace vectoriel de dimension p d'un espace vectoriel de dimension n est l'intersection de $n-p$ hyperplans indépendants (c'est-à-dire noyaux de formes linéaires indépendantes).

En dimension infinie, la correspondance entre les sous-espaces vectoriels et leurs orthogonaux ne fonctionnent plus très bien, les égalités devenant parfois des inclusions (exercice 7).

Ces propriétés, et plus généralement les principes de dualité (zéros/fonctions) sont utilisées dans plusieurs domaines des mathématiques, notamment en géométrie affine et projective.

Exercice 1 : Forme linéaire et hyperplan.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrer qu'un sous-espace vectoriel de E est un hyperplan, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de codimension 1 (admettant une droite comme supplémentaire), si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E.
2. (a) Soient u_1, u_2 deux formes linéaires sur E. Montrer que si $\ker u_1 \subset \ker u_2$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u_2 = \lambda u_1$.
   (b) En déduire que deux formes linéaires non nulles ont même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles.
   (c) Soit H un hyperplan de E et f un endomorphisme de E. Montrer que H est stable par f si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Im}(f - \lambda id) \subset H$.

1. Si $H = \ker u$ et $x \in E$ tel que $u(x) \neq 0$, alors $H + vect(x) = E$. Réciproquement si $H \oplus vect(x) = E$, alors la forme linéaire définie par $u_{|H} = 0$ et $u(x) = 1$ est non nulle et de noyau H.

2.a. Si $u_2 = 0$, c'est trivial. Sinon, soit $H = \ker u_1$ et $x \in E$ tel que $u_2(x) \neq 0$. Alors $u_1(x) \neq 0$, $E = H \oplus vect(x)$ et $u_2 = \frac{u_2(x)}{u_1(x)} u_1$ car cette égalité est vraie sur H et en x.

2.b. évident. 2.c. Soit u une forme linéaire de noyau H. Alors $u \circ f$ est une forme linéaire dont le noyau contient H, donc d'après 2.a il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u \circ f = \lambda u$. Cela donne $u \circ (f - \lambda id) = 0$, ce qui est la question posée.

Exercice 2 : Base duale en dimension finie, $\dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{E}^*$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On note $\mathcal{B}^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ sa famille duale, où les $e_i^* \in E^*$ sont définis sur la base $\mathcal{B}$ par :

$$\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in E$, on a :

$$x = e_1^*(x)e_1 + ... + e_n^*(x)e_n.$$

On dit que $(e_1^*, ..., e_n^*)$ sont les formes coordonnées dans la base $(e_1, ..., e_n)$.

2. Montrer que pour toute forme linéaire $u \in E^*$, on a :

$$u = u(e_1)e_1^* + ... + u(e_n)e_n^*.$$

Exprimer cette égalité sous forme matricielle, sur les matrices dans la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer que $\mathcal{B}^*$ est une base de E^* et en déduire que $\dim E = \dim E^*$.
4. Montrer que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases distinctes de E, alors $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}'^*$ sont deux bases distinctes de E^*.

1. trivial.

2. trivial. $mat_{\mathcal{B}} u = (a_1 \ \dots \ a_n) = a_1(1 \ 0 \ \dots 0) + \dots + a_n(0 \ \dots 0)$.

3. D'après ce qu'on vient de dire $\mathcal{B}^*$ est génératrice de E^*. Elle est libre de manière évidente en appliquant une C.L. nulle aux vecteurs $e_1, ..., e_n$.

4. Les vecteurs $e_1, ..., e_n$ sont caractérisés en coordonnées par $e_1^*, ..., e_n^*$: si $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'^*$, on applique la formule de la question 1 aux e_i'.

Exercice 3 : Deux preuves de l'existence de bases antéduales.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Nous allons montrer de deux manières différentes l'existence de bases antéduales aux bases de E^*. La deuxième preuve utilise une base de référence dans E et elle est constructive (elle donne une méthode matricielle pour calculer une base duale). La première preuve utilise un morphisme intrinsèque (aux structures utilisées), qui ne nécessite aucun choix de base. On peut la rendre constructive en travaillant dans des bases (le calcul matriciel serait alors le même que celui obtenu dans la deuxième preuve).

Première preuve, non constructive.

1. Montrer que pour tout $x \in E$ non nul, il existe une forme linéaire non nulle $u \in E^*$ telle que $u(x) \neq 0$.
2. Pour tout $x \in E$, on note ϕ_x l'application de E^* dans $\mathbb{K}$ définie par $\phi_x : u \mapsto u(x)$. Montrer que ϕ_x est une forme linéaire sur E^*, c'est-à-dire un élément de $(E^*)^*$, le *bidual* de E, noté E^{**}.
3. Montrer que l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & E & \to & E^{**} \\ & & x & \mapsto & \phi_x \end{array}$$

est un isomorphisme linéaire (*on l'appelle l'isomorphisme canonique entre E et son bidual E^{**}*).

4. Soit $\mathcal{B}_* = (u_1, ..., u_n)$ une base de E^* et $(\mathcal{B}_*)^* = (u_1^*, ..., u_n^*)$ sa base duale dans E^{**}. Montrer que $\mathcal{B} = \phi^{-1}((\mathcal{B}_*)^*)$ est l'unique base de E antéduale de la base $\mathcal{B}_*$ (c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_*$).

Deuxième preuve, constructive.

Référence : [Rombaldi, mathématiques pour l'Agrégation, Algèbre et géométrie, théorème 14.2].

Soit $\mathcal{B}_0$ une base de E et $\mathcal{B}_* = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E^*. Pour $i = 1, \dots, n$, on note $L_i = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0} u_i$ la matrice de u_i dans la base $\mathcal{B}_0$ de E. On note $Q = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ la matrice dont les lignes sont les matrices lignes L_i.

5. Montrer que Q est inversible.
6. En notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de Q^{-1} et $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de E de matrices coordonnées $C_1, \dots, C_n$ dans la base $\mathcal{B}_0$ de E, montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est l'unique base de E antéduale de la base $\mathcal{B}_*$.
7. Montrer que les formes linéaires sur $\mathbb{K}^2$ définies par :

$$\phi_1 : (x, y) \mapsto x + y \qquad\qquad \phi_2 : (x, y) \mapsto x - y$$

   forment une base de $(\mathbb{K}^2)^*$. Déterminer la base antéduale de cette base (ϕ_1, ϕ_2).

1. On prend un supplémentaire H de vect (x) et on construit u par exemple par $u_{|H)} = 0$ et $u(x) = 1$.

2.

3.

4.

5. Les lignes de la matrice Q sont linéairement indépendantes. Donc Q est inversible (on utilise ici une propriété fondamentale du déterminant, l'invariance par transposition de la matrice).

6. $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E car la matrice dans $\mathcal{B}_0$ de cette famille de vecteurs est inversible. On a $\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_n \end{pmatrix} = I_n$, donc $L_i.C_j = \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Cela exprime matriciellement, dans la base $\mathcal{B}_0$, que $u_i(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. Donc $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E antéduale de la base $\mathcal{B}_*$. La base antéduale est unique d'après la question 4 de l'exercice 2.

7. On a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = I_2$ donc la base antéduale de (ϕ_1, ϕ_2) est la base $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}))$ de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Changement de bases et de coordonnées. Bases duales et antéduales.

Cet exercice met en oeuvre le résultat de l'exercice 3. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,1), e_2 = (0,1,-1), e_3 = (1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer les formes linéaires e_1^*, e_2^*, e_3^* de la base duale $\mathcal{B}^*$, c'est-à-dire déterminer les coordonnées d'un vecteur $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

   On a :
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   donc la base duale de $\mathcal{B}$ est la base $(u_1 : (x,y,z) \mapsto 2x - y - z, u_2 : (x,y,z) \mapsto x - z, u_3 : (x,y,z) \mapsto -x + y + z)$. Autrement dit les coordonnées du vecteurs $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 2x - y - z \\ x - y \\ -x + y + z \end{pmatrix}$.

2. (a) Montrer que $\mathcal{B}_* = (u_1 : (x,y,z) \mapsto x + y - z, u_2 : (x,y,z) \mapsto -y + z, u_3 : (x,y,z) \mapsto -x + z))$ forme une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

   (b) Déterminer une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\begin{pmatrix} x + y - z \\ -y + z \\ -x + z \end{pmatrix}$ soit les coordonnées du vecteur (x,y,z) dans la base $\mathcal{B}$, autrement dit déterminer la base antéduale de la base $\mathcal{B}_*$.

   l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 : Le dual en dimension infinie.

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. On note $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} = (X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ la base canonique de E. On note $(e_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ sa famille duale, où les $e_i^* \in E^*$ sont définis comme en dimension finie par :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}.$$

1. Montrer que la formule $u = \sum_{i=0}^{\infty} e_i^*$ définit un élément de E^* et donner l'image de $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ par u.
2. Montrer que la famille $(e_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille libre non génératrice de E^*.

Exercice 6 : La dualité s'exprime sur les sous-espaces vectoriels.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrer que si F est une partie de E, alors $F^\circ = (\operatorname{vect} F)^\circ$.
2. Montrer que si F est une partie de E^*, alors ${}^\circ F = {}^\circ(\operatorname{vect} F)$.

Exercice 7 : Les principes fondamentaux de dualité.

Référence : [Rombaldi, mathématiques pour l'Agrégation, Algèbre et géométrie].

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$ tel que $x \notin F$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $u \in E^*$ telle que $u_{|F} = 0$ et $u(x) \neq 0$. *Indication : utiliser un supplémentaire G de $F \oplus \mathbb{K}x$ dans E et la décomposition $E = F \oplus \mathbb{K}x \oplus G$.*
2. Soit F, F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) $\{0\}^\circ = E^*$, $E^\circ = \{0\}$.
   (b) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow {F_2}^\circ \subset {F_1}^\circ$.
   (c) $F = {}^\circ(F^\circ)$. *Indication : pour l'inclusion difficile, utiliser la question 1.*
   (d) $(F_1 + F_2)^\circ = {F_1}^\circ \cap {F_2}^\circ$.
   (e) $(F_1 \cap F_2)^\circ = {F_1}^\circ + {F_2}^\circ$. *Indication : pour l'inclusion difficile, décomposer E sous la forme $E = G_1 \oplus G_2 \oplus (F_1 \cap F_2) \oplus G$ où G_1 et G_2 est des supplémentaires de $F_1 \cup F_2$ dans F_1 et F_2, puis décomposer une forme linéaire $u \in (F_1 \cap F_2)^\circ$ comme somme d'une forme nulle sur F_1 et une forme nulle sur F_2.*
3. Soit F, F_1, F_2 des sous-espaces vectoriels de E^*. Montrer les propriétés suivantes :
   (a) ${}^\circ\{0\} = E$, ${}^\circ E^* = \{0\}$.
   (b) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow {}^\circ F_2 \subset {}^\circ F_1$.
   (c) $F \subset ({}^\circ F)^\circ$.
   (d) ${}^\circ(F_1 + F_2) = {}^\circ F_1 \cap {}^\circ F_2$.
   (e) ${}^\circ F_1 + {}^\circ F_2 \subset {}^\circ(F_1 \cap F_2)$.
4. À l'aide de l'exemple $E = \mathbb{K}[X]$ (exercice 5), montrer que les inclusions dans les questions 3.c et 3.e ne sont pas toujours des égalités.
5. On suppose que E est de dimension finie.
   (a) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors :
   $$\dim F + \dim F^\circ = \dim E.$$
   (b) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E^*, alors :
   $$\dim {}^\circ F + \dim F = \dim E.$$
   Indication : utiliser des bases duales.
   (c) En déduire que les inclusions dans les questions 3.c et 3.e sont des égalités en dimension finie.

Exercice 8 : Famille génératrice de vecteurs et de formes linéaires.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs de E vérifiant la propriété suivante :
$$\forall u \in E^*, \quad u(e_1) = ... = u(e_n) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$
Montrer que $\dim E \leq n$.

   la famille $(e_1, ..., e_n)$ engendre E.

2. Soit $(u_1, ..., u_n)$ une famille de formes linéaires sur E vérifiant la propriété suivante :
$$\forall x \in E, \quad u_1(x) = ... = u_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
Montrer que $\dim E \leq n$.

Exercice 9 : Famille libre de formes linéaires.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(u_1, ..., u_k)$ une famille de formes linéaires sur E. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) La famille $(u_1, ..., u_k)$ est libre.

(b) L'application $u = (u_1, ..., u_k) : E \to \mathbb{K}^k$ (définie par $u(x) = (u_1(x), ..., u_k(x))$) est surjective.

(c) $\operatorname{codim}\{x \in E \mid u_1(x) = ... = u_k(x) = 0\} = k$.

(d) Il existe une famille $(x_1, ..., x_k)$ de E telle que le déterminant suivant est non nul :
$$\begin{vmatrix} u_1(x_1) & \dots & u_k(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_k(x_1) & \dots & u_k(x_k) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Indication : travailler avec des bases de E et de E^*. Ce résultat est vrai en dimension infinie, on peut donc en faire la preuve sans utiliser de base duale (mais en utilisant des supplémentaires).

Exercice 10 : Condition sur les noyaux pour être combinaison linéaire dans $\mathbf{E}^*$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, ..., u_k$ des formes linéaires sur E. Montrer la propriété suivante :
$$\forall u \in E^*, \quad u \in \operatorname{vect}(u_1, ..., u_k) \Leftrightarrow \ker u_1 \cap \cdots \cap \ker u_k \subset \ker u$$
de deux manières différentes :

1. dans le cas où E est de dimension finie, en utilisant des bases. On se ramènera au cas où la famille $(u_1, ..., u_k)$ est libre.
2. en dimension quelconque, en utilisant les propriétés de dualité (question 2 et 3 de l'exercice 7). On exprimera les deux propositions de l'équivalence en terme de sous-espaces vectoriels de E ou E^* et leurs orthogonaux.

Exercice 11 : Une forme quadratique fondamentale : le plan hyperbolique.

On se place sur le plan vectoriel $\mathbb{K}^2$ et on considère l'application :

$$q \quad : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x,y) & \mapsto & 2xy \end{array}$$

1. Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^2$ et déterminer sa forme polaire b (c'est-à-dire la forme bilinéaire symétrique b telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2,\ q((x,y)) = b((x,y),(x,y))$).
2. Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$.
3. Déterminer le noyau, le rang et le cône isotrope de q.
4. À l'aide de l'algorithme de Gauss, déterminer une base de $\mathbb{K}^2$ orthogonale pour q.
5. Déterminer toutes les bases orthogonales de $\mathbb{K}^2$ pour q.
6. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer la signature de q.
   (b) Trouver toutes les bases de $\mathbb{R}^2$ orthogonales pour q et orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. $b((x,y),(x',y')) = xy' + x'y$.

2. $\mathrm{mat}_{can} q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 4. $q((x,y)) = \frac{1}{2}(x+y)^2 - \frac{1}{2}(x-y)^2$ donc (voir la question 7 de l'exercice 3) $q(a(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) + b(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2$. Cela exprime que la base $((\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}))$ de $\mathbb{R}^2$ est orthogonale pour b.

Exercice 12 : Signature d'une forme quadratique somme de carrés.

Cet exercice étudie le lien entre le rang d'une forme quadratique et une écriture de cette forme comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires.

1. En utilisant la question 2 de l'exercice 4, déterminer la signature et une base orthogonale de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q : (x,y,z) \mapsto (x+y-z)^2 + (-y+z)^2 - 2(-x+z)^2.$$

   Donner les matrices de q dans la base canonique et dans la base orthogonale et donner la formule de changement de base.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $u_1, ..., u_k$ des formes linéaires sur E et $\lambda_1, ..., \lambda_k$ des réels.

2. Montrer que $q = \lambda_1 u_1^2 + ... + \lambda_k u_k^2$ est une forme quadratique et donner sa forme polaire.

3. (a) Montrer que si la famille $(u_1, ..., u_k)$ est libre dans E^*, alors $\mathrm{rg}(q) = k$. *Indication : prendre une base adaptée de E^*, sa base antéduale et considérer la matrice de q dans cette base.*

   (b) Montrer que $\mathrm{rg}(q) \leq \mathrm{rg}(u_1, ..., u_k)$.

4. Application : donner le rang et la signature des formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

   (a) $q_1 : (x, y, z) \mapsto (x + y)^2 + (x - z)^2 - 2z^2$.

   (b) $q_2 : (x, y, z) \mapsto x^2 + (x + y)^2 + 2(x - z)^2 + (y + z)^2$.

   (c) $q_3 : (x, y, z) \mapsto (x + y)^2 + 2(x - z)^2 + (y + z)^2$.

   (d) $q_4 : (x, y, z) \mapsto (x + y)^2 + 2(x - z)^2 - (y + z)^2$.

   (e) $q_5 : (x, y, z) \mapsto 2x^2 + 2y^2 - (x + y)^2 - (x - y)^2$.

Exercice 13 : Forme quadratique utilisant des traces sur les espaces de matrices.

On considère les applications suivantes :

$$\begin{array}{rccl} b_1 & : & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & (A, B) & \mapsto & \mathrm{tr}(A\,{}^tB) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} b_2 & : & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ & & (A, B) & \mapsto & \mathrm{tr}(AB) \end{array}$$

1. Montrer que b_1 et b_2 sont des formes bilinéaires symétriques sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Donner les formes quadratiques q_1 et q_2 associées à b_1 et b_2.
2. Dans le cas $n = 2$, donner les matrices de b_1 et b_2 dans la base canonique de $\mathrm{M}_2(\mathbb{K})$.
3. Montrer que les formes bilinéaires b_1 et b_2 sont non dégénérées. *Indication : on pourra soit déterminer les matrices de b_1 et b_2 dans la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$, soit déterminer les noyaux $M_n(\mathbb{K})^\perp$ de ces formes bilinéaires.*
4. On suppose dans cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

   (a) Déterminer la signature de la forme quadratique q_1.

   (b) Dans le cas $n = 2$, déterminer la signature de la forme quadratique q_2 à l'aide du procédé d'orthogonalisation de Gauss.

   (c) Montrer (pour n quelconque) que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Antisym}_n(\mathbb{R})$, formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques, sont orthogonaux pour b_2.

   (d) Déterminer la signatures de la forme quadratique q_2.

Exercice 14 : Signature et restriction d'une forme quadratique.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une forme quadratique q de signature (r, s). Soit H un hyperplan de E. On note (r_H, s_H) la signature de la forme quadratique $q_{|H}$.

1. Montrer que $r - 1 \leq r_H \leq r$ et $s - 1 \leq s_H \leq s$. *Indication : utiliser la définition de r et s.*
2. Montrer à l'aide d'exemples que les quatre possibilités obtenues à la question 1 pour la signature de $q_{|H}$ peuvent se réaliser. *Indication : les exemples peuvent être trouvés en dimension 2 et généralisés en dimension quelconque.*

Exercice 15 : Une forme bilinéaire non dégénérée identifie E et E^*.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Dans cet exercice, on va montrer que la donnée d'un isomorphisme entre E et E^* est exactement la donnée d'une forme bilinéaire (non nécessairement symétrique) non dégénérée sur E. On commence par l'exemple fondamental d'un espace euclidien.

1. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $< \mid >$. Montrer que toute forme linéaire $u \in (\mathbb{R}^n)^*$ est de la forme $x \mapsto < a|x >$ pour un certain vecteur $a \in \mathbb{R}^n$. *Indication : travailler en coordonnées dans la base canonique.*
2. On se place dans un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire canonique noté $< \mid >$. Montrer que toute forme linéaire $u \in E^*$ est de la forme $x \mapsto < a|x >$ pour un certain vecteur $a \in E$. *Indication : travailler en coordonnées dans une base.*
3. On se place dans un espace vectoriel E muni d'une forme bilinéaire non dégénérée b.
   (a) Montrer que l'application :
   $$\begin{array}{cccc} \phi & : & E & \to & E^* \\ & & x & \mapsto & \phi(x) : y \mapsto b(x, y) \end{array}$$
   est bien définie et linéaire.
   (b) Montrer que b est non dégénérée si et seulement si ϕ est injective.
   (c) Si $\mathcal{B}$ est une base de E, comparer la matrice de ϕ dans les bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{B}^*$ de E^* avec la matrice de b dans la base $\mathcal{B}$.
   (d) Montrer que ϕ est un isomorphisme si et seulement si b est non dégénérée.
4. En déduire que si b est une forme bilinéaire non dégénérée sur E, alors toute forme linéaire $u \in E^*$ est de la forme $x \mapsto b(a, x)$ pour un certain vecteur $a \in E$.
5. Réciproquement, on suppose que $\phi : E \to E^*$ est un isomorphisme. Montrer que b définie sur $E \times E$ par $b : (x, y) \mapsto \phi(x)(y)$ est une forme bilinéaire non dégénérée sur E.
6. Application (utiliser l'exercice 13) : soit H un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux matrices non nulle $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \quad M \in H \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A\,{}^tM) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}(BM) = 0.$$
   Quel lien y a-t-il entre A et B ?

Exercice 16 : La signature peut se voir sur les mineurs principaux de la matrice.

Référence : Gourdon, Algèbre.

Étant donnée une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout $k = 1, ..., n$, on appelle k-ième mineur principal de A le déterminant d_k de la sous-matrice de A formée des k premières lignes et colonnes :

$$d_k = \det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq k}\right).$$

On veut montrer que si A est une matrice symétrique réelle, alors A est une matrice définie positive (c'est-à-dire une matrice de produit scalaire) si et seulement si tous ses mineurs principaux sont strictement positifs (critère de Sylvester). C'est un cas particulier d'un résultat plus général sur la détection de la signature par les mineurs principaux.

On se place dans $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que si b est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$, alors les déterminants de toutes les matrices de b (dans toute base de $\mathbb{R}^n$) ont même signe.
2. Montrer que si A est une matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, alors tous ses mineurs principaux sont strictement positifs.

On considère désormais une matrice symétrique réelle S dont tous les mineurs principaux sont strictement positifs. On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et la forme bilinaire symétrique b telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, b = S$. On note q la forme quadratique associée à b.

3. On note $H = \mathrm{vect}\,(e_1, ..., e_n)$. Montrer que b est un produit scalaire si et seulement si $b_{|H}$ est un produit scalaire et $q(e_n) > 0$. *Indication : pour le sens difficile, prendre une base orthonormée de H pour $b_{|H}$ et la compléter avec un vecteur orthogonal à H. Puis considérer les déterminants.*
4. En déduire par récurrence le critère de Sylvester.

Exercice 17 : Vrai/Faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier la réponse.

1. Les deux matrices suivantes sont congruentes dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   c'est-à-dire il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP = B$.
2. Soient u_1, u_2, u_3 trois formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^3$. La forme quadratique $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$ possède des vecteurs $x \neq 0$ tels que $q(x) < 0$.
3. Soient u_1, u_2, u_3 trois formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^3$. La forme quadratique $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$ possède des vecteurs isotropes non nuls.

4. Une forme quadratique non dégénérée ne possède pas de vecteur isotrope non nul.
5. Soit E un espace vectoriel, q une forme quadratique sur E. Si q est non dégénérée, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $E = F \oplus F^{\perp}$.
6. Soit E un espace vectoriel, q une forme quadratique sur E. Si q est non dégénérée, alors pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a $F = (F^{\perp})^{\perp}$.
7. Soit E un espace vectoriel, q une forme quadratique sur E. Si x est un vecteur isotrope, alors pour tout $y \in E$, on a $q(x+y) = q(y)$.
8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, q une forme quadratique sur E de signature (p, q). Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension $> \max(p, q)$, alors F possède un vecteur isotrope.
9. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et un endomorphisme symétrique f de l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel tels que :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, f = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Étant données les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

    il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient diagonales.