Devoir décembre 2022
AGREGATION INTERNE

Objectif .

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$ de deux façons différentes : un point de vue déterministe et un point de vue probabiliste. Pour conclure à une formule du type $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(K)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(K)}$ avec K entier supérieur ou égal à 2, les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f_n', \dots, f_n^{(K-1)}$ (par exemple de convergence simple sur tout l'intervalle ou même en un seul point). Le sujet montre que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où x parcourt un ensemble fini.
Cette dernière hypothèse sera de nouveau affaiblie dans la partie probabiliste consacrée à la dérivation de séries aléatoires de fonctions.
Le sujet est divisé en quatre parties :

- la partie I est un “vrai/faux”.
- la partie II étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe $\mathcal{C}^K$;
- la partie III utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère $\mathcal{C}^K$ à une somme de série de fonctions ;
- la partie IV, qui est indépendante des parties I et II, étudie la convergence des séries aléatoires numériques de la forme $\sum X_n a_n$, où (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes de Rademacher et (a_n) une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ; la partie V utilise les résultats des parties précédentes pour donner une application au caractère $\mathcal{C}^K$ de la somme d'une série aléatoire de fonctions de la forme $\sum X_n f_n$.

Notations .

- Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leqslant j$, la notation $[\![i, j]\!]$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.
- La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.
- Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.
- Pour tout intervalle I, on note $\mathcal{C}^K(I)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^K$. Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in [\![0, K]\!]$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f'\ ,\ f^{(2)} = f''$).
- Dans le cas particulier $I = [0, 1]$, pour toute fonction bornée $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

I Vrai ou faux ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? On justifiera soigneusement les réponses.

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente. Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ converge.
2. Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors la fonction $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Il existe une constante C telle que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{C}{n\sqrt{n}}$.
4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}([0, 1])$ telle que $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in [0, 1]$. Alors $f = \sum_{n\geq 0} f_n$ est continue sur $[0, 1]$.
5. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge.
   Alors $\mathbb{P}(\cap_{n\geq 0} \cup_{m\geq n} A_m) = 0$.
6. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{1}{k}$$
   Alors la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
7. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Alors $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$

II Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit K réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de l'intervalle $[0,1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels $x_1, \ldots, x_K$) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0,1]), \quad \max_{0 \leqslant k \leqslant K-1} \left\| f^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(K)} \right\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^{K} |f(x_\ell)| . \tag{I.1}$$

Une inégalité du type précédent est appelée inégalité d'interpolation à l'ordre K.

II. A Cas particulier $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0,1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1 ,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0,1]), \quad \|f\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty + C |f(x_1)| . \tag{I.2}$$

Q 1. Montrer l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1$.
Q 2. Soit $C \in]0,1[$. À l'aide d'un exemple simple de fonction f, montrer que l'inégalité d'interpolation (I.2) est fausse.

II. B Cas particulier $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0,1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2 ,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0,1]), \quad \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty) \leqslant \|f''\|_\infty + C(|f(x_1)| + |f(x_2)|) \tag{I.3}$$

Q 3. Pour tous $x \in [0,1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, démontrer l'inégalité

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leqslant \|f''\|_\infty .$$

Q 4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$, on a

$$\|f'\|_\infty \leqslant \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$$

Q 5. Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $C = 1 + \dfrac{1}{x_2 - x_1}$.

II. C Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K, donnée par (I.1). On fixe $K \in \mathbb{N}^*$
Q 6. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Psi : \mathbb{R}_{K-1}[X] & \to & \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_K)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Q 7. Montrer qu'il existe K polynômes $L_1, \ldots, L_K$ de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$, le polynôme $P = \sum\limits_{j=1}^{K} f(x_j) L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1, K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell) .$$

Dans les deux questions suivantes **Q 8** et **Q 9**, on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0,1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question **Q 7**.
Q 8. Pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K - k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.
Q 9. En déduire l'inégalité $\left\| f^{(k)} - P^{(k)} \right\|_\infty \leqslant \left\| f^{(k+1)} - P^{(k+1)} \right\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$.
Q 10. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation **(I.1)** est vérifiée.

III Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour les séries de fonctions .

III. A Énoncé général

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $K \in \mathbb{N}^*$, on considère

— des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ d'un intervalle $[a,b]$ (avec $a < b$) ;

— une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H 1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a,b]$;

(H 2) pour tout $\ell \in [\![1,K]\!]$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Q 11. Dans le cas particulier $[a,b]=[0,1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,b]$ pour tout $k \in [\![1,K-1]\!]$.

Q 12. Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a,b]$ avec $a<b$.

On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ est définie par $\sigma(t)=(1-t)a+tb$ pour tout $t \in [0,1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Q 13. Démontrer que F_0 est de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[a,b]$ et que $F_0^{(k)}=F_k$ pour tout $k \in [\![1,K]\!]$.

III. B Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[)$ vérifiant $f_n(1)=0$, $f_n(2)=0$ et $f_n''(x)=(-1)^n 2^{-nx^2}$ pour tout $x>0$.

Q 15. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$ et que la fonction $F : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Q 16. Expliciter $F''(x)$.

Q 17. Montrer que $|F(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [1,2]$.

IV Inégalité de Kolmogorov

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de carré sommable ($\mathbb{E}(X_n^2)<+\infty$ pour tout n) et centrées ($\mathbb{E}(X_n)=0$ pour tout n).

Pour $n \geq 1$, on note $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Q 18. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que pour tout $a>0$ et pour tout $n\geq 1$, on a

$$\mathbb{P}\Big(|S_n|>a\Big) \leq \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k^2).$$

Le but de cet exercice est de démontrer une inégalité bien plus forte que la précédente :

$$\forall a>0,\ \forall n\geq 1,\ \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n}|S_k|>a\Big) \leq \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k^2).$$

Soit $a>0$ fixé.

Q 19. On note $A_1=\{|S_1|>a\}$ et pour $k\geq 2$:

$$A_k=\Big\{|S_1|\leq a,\ldots,|S_{k-1}|\leq a,|S_k|>a\Big\}.$$

Décrire l'événement $\Big\{\max\limits_{1\leq k\leq n}|S_k|>a\Big\}$ à l'aide des A_k.

Q 20. Montrer que pour tout k compris entre 1 et n, les variables aléatoires S_n-S_k et $S_k\mathbb{1}_{A_k}$ sont indépendantes.

Q 21. En déduire que pour tout k compris entre 1 et n

$$\mathbb{E}(S_n^2\mathbb{1}_{A_k})=\mathbb{E}\big((S_n-S_k)^2\mathbb{1}_{A_k}\big)+\mathbb{E}(S_k^2\mathbb{1}_{A_k})\geq a^2\mathbb{P}(A_k).$$

Q 22. En déduire l'inégalité de Kolmogorov (version finie) :

$$\forall a>0,\ \forall n\geq 1,\ \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n}|S_k|>a\Big) \leq \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k^2).$$

Q 23. En déduire l'inégalité de Kolmogorov (version infinie) :

$$\forall a>0,\ \mathbb{P}\Big(\sup_{m\geq 1}\Big|\sum_{k=1}^{m}X_k\Big|>a\Big) \leq \frac{1}{a^2}\sum_{k=1}^{+\infty}E(X_k^2).$$

V Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

Le but de cette partie est de montrer que, si la série $\sum a_n^2$ converge, alors la série aléatoire $\sum X_n a_n$ converge avec probabilité 1 .

Notations

— $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

— $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;

— pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} X_n a_n$ la somme partielle au rang N de la série $\sum X_n a_n$.

Q 24. En utilisant l'inégalité de Kolmogorov (version infinie), montrer que

$$\forall a > 0,\ \forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ m \geq n+1 \Rightarrow \mathbb{P}\Big(\sup_{m\geq n+1} \Big|S_m - S_n\Big| > a\Big) \leq \frac{1}{a^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k^2.$$

Q 25. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k>\varphi(n)} a_k^2 \leq \frac{1}{n^2}$.

Q 26. A l'aide du lemme de Borel-Cantelli, montrer que l'événement

$$\Big\{\exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall m \geq \varphi(n)+1,\ |S_m - S_{\varphi(n)}| \leq a\Big\}$$

est de probabilité 1.

Q 27. En déduire que l'événement

$$\Big\{\exists N,\ \forall p, q \geq \varphi(N)+1,\ |S_p - S_q| \leq 2a\Big\}$$

est de probabilité 1.

Q 28. En déduire que l'événement

$$\Big\{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists N,\ \forall p, q \geq \varphi(N)+1,\ |S_p - S_q| \leq 1/k\Big\}$$

est de probabilité 1.

Q 29. En déduire que la série aléatoire $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n X_n$ converge avec probabilité 1.

VI Dérivation $\mathcal{C}^K$ pour des séries aléatoires de fonctions

On fixe $K \in \mathbb{N}^*$ et on considère

— une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses de la partie précédente ;

— des réels distincts $x_1 < \cdots < x_K$ de $[0,1]$;

— une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^K$ sur $[0,1]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H 1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[0,1]$;

(H 2') pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$, la série numérique $\sum f_n(x_\ell)^2$ est convergente.

Q 30. Montrer que l'une des deux hypothèses **(H 2')** ou **(H 2)** (étudiée dans la partie II) implique l'autre.

Q 31. Montrer que l'événement

$$\Big\{\text{pour tout } \ell \in [\![1, K]\!], \text{la série} \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente}\Big\}$$

a une probabilité 1 .

Q 32. On note $P_n \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ un polynôme vérifiant $P_n(x_\ell) = f_n(x_\ell)$ pour tout $\ell \in [\![1, K]\!]$ (cf. question **Q 7**), montrer que l'événement

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } k \in [\![0, K]\!], \text{la série de fonctions} \sum X_n\left(f_n-P_n\right)^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1]\,, \\ \text{la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n\left(f_n-P_n\right) \text{ est de classe } \mathcal{C}^K, \\ \text{pour tout } k \in [\![0, K]\!], \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n\left(f_n-P_n\right)\right)^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n\left(f_n-P_n\right)^{(k)}\end{array}\right\}$$

a une probabilité 1 .

Q 33. Montrer que l'événement

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pour tout } k \in [\![0, K]\!], \text{ la série de fonctions } \sum X_n f_n^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0,1]\,, \\ \text{la fonction } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^K, \\ \text{pour tout } k \in [\![0, K]\!], \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n f_n\right)^{(k)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} X_n f_n^{(k)}\end{array}\right\}$$

a une probabilité 1 .

Q 34. Donner un exemple d'entier $K \in \mathbb{N}^*$ pour lequel l'événement précédent se réalise avec les fonctions f_n définies par

$$\left\{\begin{array}{l} f_0 = 0 \\ f_n(x) = \ln\left(1+\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]\end{array}\right.$$

• • • FIN • • •