Devoir agrégation interne

Nombre de sites visités par une marche aléatoire

Dans tout le texte, d est un élément de $\mathbb{N}^*$. On note 0_d le d -uplet dont toutes les coordonnées valent 0, c'est-à-dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^d$.
On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi de X et définies sur un même espace probabilisé.
La suite de variables aléatoires $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $S_0 = 0_d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire de pas X, à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$. On note R la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ définie par

$$R = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} & \text{si } \{n \in \mathbb{N}^*, S_n = 0_d\} \neq \emptyset \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, R est égal à $+\infty$ si la marche aléatoire $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne revient jamais en 0_d, au premier instant auquel cette marche aléatoire revient en 0_d sinon.
Pour n dans $\mathbb{N}$, soit N_n le cardinal du sous-ensemble

$$\{S_k, k \in \{0, \ldots, n\}\}$$

de $\mathbb{Z}^d$. Le nombre N_n est donc le nombre de points de $\mathbb{Z}^d$ visités par la marche aléatoire $(S_n)_{n\in N}$ après n pas.
Le but du problème est d'étudier asymptotiquement l'espérance $E(N_n)$ de la variable aléatoire N_n .

A. Préliminaires

Les cinq questions de cette partie sont indépendantes et utilisées dans la partie C.

1 . Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la factorisation

$$(X+1)^{2n} = (X+1)^n (X+1)^n$$

montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2 . Rappeler la formule de Stirling, puis déterminer un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} c\frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

3 . Si α est un élément de $]0, 1[$, montrer, par exemple en utilisant une comparaison série-intégrale, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Si α est un élément de $]1, +\infty[$, montrer de même que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

4 . Pour $x \in [2, +\infty[$, on pose

$$I(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$$

Justifier, pour $x \in [2, +\infty[$, la relation

$$I(x) = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{2}{\ln(2)} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2}$$

Établir par ailleurs la relation

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\ln(t))^2} x = o(I(x))$$

En déduire finalement un équivalent de $I(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

5 . Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, rappeler, sans donner de démonstration, le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ sur $]-1, 1[$.

Justifier la formule: $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.$$

B. Marches aléatoires, récurrence

On considère les fonctions F et G définies par les formules

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(S_n = 0_d\right) x^n$$
$$\forall x \in [-1, 1], \quad G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n) x^n$$

6 . Montrer que les séries entières définissant F et G ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1

Justifier alors que les fonctions F et G sont définies et de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

Montrer que G est définie et continue sur $[-1,1]$ et que

$$G(1) = \mathbb{P}(R \neq +\infty)$$

7 . Si k et n sont des entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$, montrer que

$$\mathbb{P}\left((S_n = 0_d) \cap (R = k)\right) = \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}\left(S_{n-k} = 0_d\right)$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(S_n = 0_d\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(R = k)\mathbb{P}\left(S_{n-k} = 0_d\right)$$

8 . Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad F(x) = 1 + F(x)G(x)$$

Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers 1^-, en discutant selon la valeur de $\mathbb{P}(R \neq +\infty)$

9 . Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que la série entière $\sum c_k x^k$ ait un rayon de convergence 1 et que la série $\sum c_k$ diverge.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$$

L'élément A de $\mathbb{R}^{+*}$ étant fixé , on montrera qu'il existe $\alpha \in]-1,1[$ tel que

$$\forall x \in]1-\alpha, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k > A$$

10 . Montrer que la série $\sum \mathbb{P}\left(S_n = 0_d\right)$ est divergente si et seulement si $\mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1$

11 . Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit Y_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement

$$(S_i \notin \{S_k, 0 \leq k \leq i-1\})$$

Montrer que, pour $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}\left(Y_i = 1\right) = \mathbb{P}(R > i)$$

En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$E\left(N_n\right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(R > i)$$

12 . Conclure que

$$\frac{E\left(N_n\right)}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(R=+\infty)$$

On pourra admettre et utiliser le théorème de Cesàro : si $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est une suite réelle convergeant vers*
le nombre réel l*, alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} l,$$

C. Les marches de Bernoulli sur$\mathbb{Z}$

Dans cette question, d est égal à 1 et on note donc simplement $0_d=0$.
Par ailleurs, p est un élément de $]0,1[, q=1-p$ et la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X=1)=p \text{ et } \mathbb{P}(X=-1)=q$$

13 . Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathbb{P}\left(S_{2n+1}=0\right)$ et justifier l'égalité :

$$\mathbb{P}\left(S_{2n}=0\right)=\binom{2n}{n}(pq)^n$$

14 . Pour $x \in]-1,1[,$ donner une expression simple de $G(x)$.

Exprimer $\mathbb{P}(R=+\infty)$ en fonction de $|p-q|$.
Déterminer la loi de R

15 . On suppose que $p=q=\frac{1}{2}$

Donner un équivalent simple de $\mathbb{P}(R=2n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
En déduire un équivalent simple de $E\left(N_n\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$