Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2022-2023.
Mercredi 18 Janvier 2023.
Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les paragraphes 5.9, 6 et 10.8 du programme officiel.

Leçons concernées

Le contenu de cette séance concerne les leçons suivantes.
117. Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.
120. Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.
205. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espaces préhilbertien. Application à l'approximation des fonctions.
319. Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.
321. Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.
355. Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.

Vrai/Faux

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux affirmations suivantes.

(1) L'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(AB^T)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

(2) L'application $(X, Y) \mapsto XY^T$ est un produit scalaire sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

(3) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts et $d \in \mathbb{N}$. Alors

$$(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_d[X]$ si et seulement si $n \geq d$.

(4) Dans un espace euclidien, toute famille orthonormée est libre.

(5) Dans un espace euclidien, pour toute famille de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, on a

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 \Leftrightarrow \forall i \neq j,\ v_i \perp v_j.$$

(6) Tout produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ possède une base orthonormée échelonnée en degré.

(7) Toute matrice symétrique est diagonalisable.

(8) La somme de deux matrices symétriques positives réelles est une matrice symétrique positive réelle.

(9) Le produit de deux matrices symétriques positives réelles est une matrice symétrique positive réelle.

(10) Pour toute matrice symétrique réelle $S \in S_n(\mathbb{R})$, on a

$$\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \exists R \in S_n(\mathbb{R}),\ R^2 = S.$$

(11) Toute matrice orthogonale réelle est inversible.

(12) Le déterminant d'une matrice orthogonale réelle est égal à 1.

(13) Dans un espace euclidien, un endomorphisme est orthogonal s'il transforme toute famille orthogonale en une famille orthogonale.

(14) Les isométries vectorielles du plan euclidien sont les rotations vectorielles.

(15) Dans un espace euclidien, un projecteur est un projecteur orthogonal si et seulement si il est auto-adjoint.

Matrices symétriques réelles

Les exercices suivants portent sur les matrices symétriques réelles, avec un accent particulier sur la positivité.

Exercice 1. [Faire ses gammes]
Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 1 & -a \\ a & -a & 2-a \end{pmatrix}.$$

Déterminer, suivant la valeur de a les sous-espaces stables par l'endomorphisme canoniquement associé à $M(a)$.

Exercice 2. [Décomposition polaire, applications. Extrait Agrégation Interne 2018.]
On note $\mathrm{SDP}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles dont toutes les valeurs propres sont > 0.

(1) Montrer que l'application $\varphi\ : \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (\Omega, S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{SDP}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(\Omega, S) = \Omega S$$

est un homéomorphisme.

(2) *Application 1.* Décrire les composantes connexes par arcs de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ à partir de celles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et réciproquement.

(3) *Application 2.* Soit G un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $G = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme d'algèbre associée :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \|M\| = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|MX\|}{\|X\|}.$$

(4) Soit S une matrice symétrique réelle. Déterminer $\|S\|$ en fonction des valeurs propres de S.

(5) *Application 3.* Calculer la distance $d_n = \inf\limits_{M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})} \|M\|$ de la matrice nulle au groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. Caractériser les matrices $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $d_n = \|M\|$.

(6) *Application 4.* Soit $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

  (a) Montrer que

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}),\ \|T - M\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|} \Rightarrow M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

  (b) Soit $\mathcal{S} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 0\}$. Montrer que

$$d(T, \mathcal{S}) = \frac{1}{\|T^{-1}\|}.$$

Exercice 3. [Ecrit ENS Lyon, second concours]
Soit S une matrice symétrique réelle de taille n. On dit que S est définie positive si et seulement si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0.$$

(1) Soit S une matrice symétrique réelle. Montrer que S est définie positive si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.

(2) Soit S une matrice symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice T symétrique définie positive telle que $T^2 = S$.

(3) Soient S une matrice symétrique définie positive, T une matrice symétrique définie positive telle que $T^2 = S$ et H une autre matrice symétrique définie positive.

   (a) Montrer que SH est semblable à THT.

   (b) En déduire que SH est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que ses valeurs propres sont > 0.

   (c) Montrer
$$\sqrt[n]{\det(S)} \leq \frac{\operatorname{Tr}(SH)}{n\sqrt[n]{\det(H)}}.$$

(4) Montrer que
$$\sqrt[n]{\det(S)} = \inf_H \frac{\operatorname{Tr}(SH)}{n\sqrt[n]{\det(H)}}$$
où la borne inférieure porte sur toutes les matrices H symétriques définies positives.

(5) En déduire que $S \mapsto \sqrt[n]{\det(S)}$ est concave sur l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n.

Exercice 4. [Classique de chez classique]
Soient A et B deux matrices symétriques réelles à valeurs propres positives ou nulles.

(1) On suppose A inversible.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice C symétrique réelle à valeurs propres > 0 telle que $C^2 = A$ (on ne demande pas de montrer l'unicité de C).

   (b) Montrer que la matrice $M = C^{-1}BC^{-1}$ est symétrique à valeurs propres positives (indication : calculer ${}^tXMX$).

   (c) Montrer que $\det(A+B) = (\det C)^2 \det(I_n + M)$, en déduire que
$$\det(A+B) \geq \det A + \det B.$$

(2) Montrer que l'inégalité précédente est encore vraie si A n'est plus supposée inversible.

Exercice 5. [Oral X/ENS 2017, Ecrit X/ENS 2015 PC]
Si $A \in S_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ les valeurs propres de A.

(1) Soit $k \leq n$ et
$$D_{k,n} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in [0,1]^n \mid \sum_{i=1}^n t_i = k\}.$$
Soit $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_n$ des réels. Montrer que
$$\sup_{(t_1,\ldots,t_n)\in D_{k,n}} \sum_{i=1}^n t_i s_i = \sum_{i=1}^k s_i.$$

(2) En déduire que pour toute famille orthonormée $(X_1, \ldots, X_k)$ de $\mathbb{R}^n$,
$$\sum_{i=1}^k {}^tX_i A X_i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(A).$$

(3) En déduire que si A et B sont deux matrices symétriques réelles, alors
$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^k \lambda_i(A+B) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(B) \text{ et } \sum_{i=k}^n \lambda_i(A+B) \geq \sum_{i=k}^n \lambda_i(A) + \sum_{i=k}^n \lambda_i(B).$$

Exercice 6. [Conv($O_n(\mathbb{R})$)**]**
On note Conv($O_n(\mathbb{R})$) l'enveloppe convexe du groupe $O_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.
Montrer que $S \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ si et seulement si le spectre de S est contenu dans $[-1, 1]$.

(2) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice O orthogonale et une matrice S symétrique positive telle que $M = OS$.

(3) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $M \in \mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R}))$ si et seulement si le spectre de ${}^tMM$ est inclus dans $[0, 1]$.

(4) En déduire enfin que
$$\mathrm{Conv}(O_n(\mathbb{R})) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Mx\| \leq \|x\|\}$$
où $\| \ \|$ désigne la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$.

PROJECTION ORTHOGONALE

Exercice 7. [Faire ses gammes]
Dans cet exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Soient
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$
et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire canoniquement associée.
On pose $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer la distance δ de Y à $\mathrm{Im}(f)$.

(2) Déterminer tous les $X \in \mathbb{R}^3$ tels que $\|AX - Y\|$ soit minimale.

(3) Parmi tous les X tels que $\|AX - Y\|$ soit minimale, déterminer celui dont la norme est minimale.

Exercice 8. [Probabilité et géométrie. ENAC 2019]
Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur noire, blanche ou rouge. On sait que cette urne contient au moins deux boules de chaque couleur.
On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges.
On tire simultanément deux boules dans l'urne et on note leur couleur.
On note G l'événement : "obtenir deux boules de la même couleur".
On note $g(n, b, r) = \mathbb{P}(G)$.

(1) Déterminer $g(n, b, r)$.

(2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine 0, soient N, B et R les points de coordonnées respectives $(15, 0, 0)$, $(0, 15, 0)$ et $(0, 0, 15)$.

  (a) Déterminer une équation cartésienne du plan affine (NBR).

  (b) Soit M le point de coordonnées (n, b, r).
  Montrer que le point M appartient au plan (NBR) et exprimer $g(n, b, r)$ à l'aide de $\|0M\|^2$.

(c) En déduire que la probabilité $g(n,b,r)$ est minimale pour un unique triplet (n_0,b_0,r_0) que l'on explicitera ainsi que $g(n_0,b_0,r_0)$.

(3) On suppose que $(n,b,r)=(n_0,b_0,r_0)$.
Un joueur mise x euros ($x\in\mathbb{N}^*$) puis il tire simultanément deux boules dans l'urne. S'il obtient deux boules de la même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise où k est un réel >1. Sinon, il ne reçoit rien. Dans les deux cas, il perd sa mise de départ.
On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Déterminer $\mathbb{E}(X)$ puis déterminer k de sorte $\mathbb{E}(X)=0$.

Exercice 9. [Matrices de Gram]
Soient $(E,\langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs. On note G_n la matrice de taille n dont le terme général est égal à $\langle x_i,x_j\rangle$.

(1) Soient $C_1,\dots,C_n$ les colonnes de G_n et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels. Démontrer que
$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_jC_j=0\Leftrightarrow\Big\|\sum_{j=1}^{n}\lambda_jx_j\Big\|^2=0.$$

(2) En déduire que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre si et seulement si la matrice G_n est inversible.

(3) En déduire que la matrice $H_n\in M_n(\mathbb{R})$, dite matrice de Hilbert, dont le terme général est $\dfrac{1}{i+j-1}$ est inversible. *Indication : considérer le produit scalaire "usuel" sur* $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(4) On suppose que la famille $(x_1,\dots,x_{n-1})$ est libre et on note $F=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n-1})$. Montrer que
$$\big(d(x_n,F)\big)^2=\frac{\det G_n}{\det G_{n-1}}.$$

Exercice 10. [Théorème de Müntz-Szász]

(1) Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ des réels >0. Montrer que
$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\le i,j\le n}\right)=\frac{\displaystyle\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\le i,j\le n}(a_i+b_j)}.$$

(2) Soit $E=\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ que l'on munit du produit scalaire usuel
$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 fg.$$
Soient $(\lambda_i)_{i\ge1}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante.
On note
$$F=\mathrm{Vect}\Big(t\mapsto t^{\lambda_i}\mid i\ge1\Big)$$
et pour tout $n\ge1$,
$$F_n=\mathrm{Vect}\Big(t\mapsto t^{\lambda_i}\mid 1\le i\le n\Big).$$

(a) Montrer que F est dense dans E si et seulement si
$$\forall\mu\in\mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty}d\big(t\mapsto t^{\mu},F_n\big)=0.$$

(b) A l'aide de (1) et de l'exercice précédent, montrer que pour tout $\mu \in \mathbb{N}^*$,

$$d^2\big(t \mapsto t^\mu, F_n\big) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\mu - \lambda_i)^2}{(2\mu+1)\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i + \mu + 1)^2}.$$

(c) On suppose $\mu \neq \lambda_i$ pour tout $i \geq 1$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$\sum_{k \geq 1} \ln\left(\frac{|\mu - \lambda_i|}{\lambda_i + \mu + 1}\right)$$

soit divergente.

(d) En déduire que

$$F \text{ est dense dans } E \Leftrightarrow \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i} = +\infty.$$

Exercice 11. [Polynômes orthogonaux]
Soient $a < b$ deux réels et $\omega \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}^{+*})$. On considère l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer qu'il existe une base $(P_n)_{n \geq 0}$ de $\mathbb{R}[X]$, qui est une famille orthonormale de E et qui vérifie $\deg(P_n) = n$ pour tout n. Montrer que cette famille (P_n) est unique si l'on suppose de plus que chaque P_n a un coefficient dominant > 0, ce que l'on suppose dorénavant.

(2) Montrer que P_n possède n racines distinctes dans $]a, b[$ (*indication : considérer le polynôme* $Q = (x - x_1) \cdots (x - x_k)$ *où les* $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ *sont les réels appartenant à* $]a, b[$ *où* P_n *s'annule en changeant de signe*).

(3) (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe trois constantes réelles a_n, b_n et c_n telles que $P_n = (a_n X + b_n)P_{n-1} + c_n P_{n-2}$. Montrer de plus que $a_n > 0$, puis que $c_n = -\dfrac{a_n \|P_{n-1}\|^2}{a_{n-1}\|P_{n-2}\|^2} < 0$.

(b) En déduire qu'entre deux racines de P_{n+1}, il y a exactement une racine de P_n.

(4) Soient $f \in E$ et $a_n(f) = \langle f, P_n \rangle$.

(a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} |a_n(f)|^2$ converge.

(b) Soit $d_n = d(f, \mathbb{R}_n[X])$. Montrer que la suite $(d_n)_{n \geq 0}$ converge. On note d sa limite.

(c) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$0 \leq d \leq \|P - f\| \leq \sup_{t \in [a,b]} |P(t) - f(t)| \sqrt{\int_a^b w}.$$

(d) En déduire que $d = 0$ puis la somme de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} |a_n(f)|^2$.

Quadriques et réduction des formes quadratiques

Les deux exercices suivants font appel à votre vision géométrique avertie des quadriques de l'espace euclidien de dimension 3.

Exercice 12. [Géométrie à l'ancienne]
On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure affine euclidienne canonique. Soient $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x+3y-z=0\}$ et $\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2=z^2\}$. Reconnaître $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$. Montrer que leur intersection est constituée de deux droites ; déterminer l'angle entre ces droites.

Exercice 13. [Formes quadratiques]
Nature de $\mathcal{K} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy+yz+xz+a(x^2+y^2+z^2)=b\}$ suivant $(a,b) \in \mathbb{R}^2$? Pour quelles valeurs de (a,b) l'ensemble $\mathcal{K}$ est-il compact ?

Exercice 14. [Polynômes et formes quadratiques]
Soit $P(x) = x^n - b_1x^{n-1} + \cdots + (-1)^n b_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Soient a_j les racines complexes de P et $V = (a_j^{i-1})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = V\,{}^tV$.

(1) Montrer que B est symétrique réelle.
(2) Montrer que B est positive si et seulement si toutes les racines de P sont réelles.
(3) Déterminer la signature de B en fonction du nombre de racines réelles de P.

Un problème de préparation à l'écrit (Nouveauté 2021-2022)

Problème.

Les quatre parties de ce problème sont assez largement indépendantes entre elles. Les résultats de la Partie II peuvent être admis afin d'aborder les parties suivantes.

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle de taille n.
On dira que A est **définie positive** si pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ${}^tXAX > 0$. On note $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.
On dira que A est **positive** si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \geq 0$. On note $S_n^{+}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

Partie I : Généralités.

(1) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle de taille n. Montrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs.
(2) Montrer que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs, alors
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n}.$$
(3) En déduire que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors
$$0 < \sqrt[n]{\det A} \leq \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A).$$
(4) Soit $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que
$$\big(\det(M)\big)^2 \leq \frac{1}{n^n}\Big(\sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij}^2\Big)^n.$$

Partie II : Décomposition de Choleski des matrices symétriques positives.

(1) Montrer que si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $a_{ii} > 0$ pout tout i.

(2) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Pour $m \in \{1, \dots, n\}$, on note A_m la matrice symétrique carrée de taille m extraite de A en supprimant les $n-m$ dernières colonnes et les $n-m$ dernières lignes de A : si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, on a donc $A_m = (a_{ij})_{1\le i,j\le m}$.
Montrer que si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors A_m est définie positive pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$. *Indication :* pour $Y = {}^t(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, on pourra introduire le vecteur $X = {}^t(y_1, \dots, y_m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

(3) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. L'objectif de cette question est de démontrer qu'il existe une unique matrice T triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont > 0 telle que $A = {}^tTT$: cette décomposition s'appelle la **décomposition de Choleski** de A.

(a) *Unicité de T.* Soient T_1 et T_2 deux matrices qui conviennent. Démontrer que $T_1T_2^{-1}$ est une matrice orthogonale puis en déduire que $T_1 = T_2$.

(b) On démontre *l'existence* de T par récurrence sur n. On écrit $A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ {}^tC & a_{nn} \end{pmatrix}$ où $A_{n-1} \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ d'après la question précédente, $C \in M_{n-1,1}(\mathbb{R})$ et $a_{nn} \in \mathbb{R}$.

(i) Soit $X = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1}C \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculer ${}^tXAX$.

(ii) Démontrer que T existe en la cherchant par blocs sous la forme $T = \begin{pmatrix} T_{n-1} & R \\ 0 & t_{nn} \end{pmatrix}$.

(4) **Inégalité d'Hadamard.**

(a) Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $A = {}^tTT$ sa décomposition de Choleski. On note $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $T = (t_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Démontrer que $a_{ii} \ge t_{ii}^2$ pour tout i. En déduire que

$$\det(A) \le \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(b) Démontrer que pour toute matrice inversible $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$|\det(M)| \le \sqrt{\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} m_{ki}^2\right)}.$$

Partie III : Une autre inégalité sur les déterminants de matrices symétriques positives.

Soient A et B deux matrices symétriques définies positives et soit $A = {}^tTT$ la décomposition de Choleski de A.

(1) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes diagonaux > 0 et une matrice orthogonale Ω telles que $B = {}^tT\,{}^t\Omega D\Omega T$.

(2) (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que

$$\big(\det(I_n + D)\big)^{1/n} \ge 1 + \big(\det(D)\big)^{1/n}.$$

(c) En déduire que

$$\big(\det(A + B)\big)^{1/n} \ge \big(\det(A)\big)^{1/n} + \big(\det(B)\big)^{1/n}.$$

(3) Montrer que l'inégalité précédente est encore vraie si $(A, B) \in S_n^{+}(\mathbb{R}) \times S_n^{+}(\mathbb{R})$.

Partie IV : Une application de l'inégalité d'Hadamard.

Dans cette partie, on utilise l'inégalité d'Hadamard (démontrée en II.(4b)) pour établir un résultat concernant les fonctions développables en série entière en 0.

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle telle que $a_0 \neq 0$. Soit $(b_n)_{n\geq 0}$ l'unique suite réelle vérifiant :

$$a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0.$$

(1) Pour $n \geq 1$, on considère la matrice $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & \cdots & & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $A \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que $b_n = \dfrac{\det(A')}{\det(A)}$ où A' est une matrice à préciser.

(2) On suppose **dans toute la suite du problème** qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la série $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ converge. On note $C = \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$.

(a) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(t) = a_n r^n e^{int}$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. Déterminer les coefficients de Fourier $(c_n(\varphi))_{n\in\mathbb{Z}}$ de φ.

(b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} (a_n)^2 r^{2n}$ converge et que $\sum_{n\geq 0} (a_n)^2 r^{2n} \leq C^2$.

(3) En déduire alors que

$$\forall n \geq 1, \ |b_n| \leq \frac{\alpha^n}{|a_0|}$$

où α est un réel positif indépendant de n à préciser. *Indication :* on appliquera l'inégalité d'Hadamard à la matrice $A'' \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de A' en multipliant pour tout i entre 1 et $n+1$ la i-ème ligne de A' par r^{i-1}.

(4) Soit $f \ : x \mapsto \sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

(a) Démontrer que le rayon de convergence de f est > 0.

(b) Démontrer que le rayon de convergence de $g \ : x \mapsto \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est > 0.

(c) Que vaut le produit de Cauchy de f et de g ?

(d) En déduire que la fonction $1/f$, définie au voisinage de 0, est développable en série entière.

Un deuxième problème de préparation à l'écrit

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}.$$

L'objectif du problème ci-dessous est de démontrer le théorème de Hausdorff suivant.

Théorème (Hausdorff, 1914).
Il existe une partition de S en 4 parties A, B, C et D et deux rotations $u, v \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ telles que

- *D est dénombrable,*
- *$C = v(B)$, $B = v(A)$ et $A = u(B \cup C)$.*

Ce théorème affirme qu'à un ensemble dénombrable près, A, B et C forment une partition de S, que A, B et C sont deux à deux isométriques et que A et $B \cup C$ sont isométriques. La partie A représente donc à la fois "le tiers" et "la moitié" de la sphère S.

Quelques années plus tard, Banach et Tarski ont utilisé le théorème de Hausdorff afin d'obtenir le résultat suivant, connu sous le nom de paradoxe de Banach-Tarski.

Théorème (Banach, Tarski, 1923).
Soient B_1 la boule unité de $\mathbb{R}^3$, B_2 la boule de centre 0 et de rayon 2 dans $\mathbb{R}^3$.
Alors il existe une partition de B_1, $B_1 = E_1 \sqcup \cdots \sqcup E_k$ et des isométries affines (composées de rotations et de translations) $u_1, \ldots, u_k$ telles que $B_2 = u_1(E_1) \sqcup \cdots \sqcup u_k(E_k)$.

De façon plus étonnante peut-être, ce théorème affirme que l'on peut découper une orange et ré-arranger les morceaux afin de construire la lune...

Exercice 15. [Le théorème de Hausdorff]
Soit

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier rapidement que u et v sont deux rotations de $\mathbb{R}^3$, en déterminer "l'axe orienté" et "l'angle orienté".

Soit

$$G = \left\{u^{\varepsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} \cdots u v^{n_k} u^{\varepsilon_2} \mid k \in \mathbb{N}^*,\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1\},\ n_1, \ldots, n_k \in \{1,2\}\right\} \cup \{I_3, u\}.$$

(2) (a) Montrer que G est un sous-groupe dénombrable de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

(b) Soit r un élément de G de la forme $r = v^{n_1} u v^{n_2} u \cdots u v^{n_k} u$ avec $k \geq 1$ et $n_j \in \{1,2\}$ pour tout j. Montrer que

$$r = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3\sqrt{3} \\ q_1 & p_4 & q_2\sqrt{3} \\ q_3\sqrt{3} & p_5\sqrt{3} & q_4 \end{pmatrix}$$

où les p_i sont des entiers pairs et les q_i sont des entiers impairs.
En déduire qu'un tel élément est différent de u et de I_3.

(c) En déduire que pour tout $r = u^{\varepsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} \cdots u v^{n_k} u^{\varepsilon_2}$ alors $r \neq I_3$ et $r \neq u$ et que l'écriture $r = u^{\varepsilon_1} v^{n_1} u v^{n_2} \cdots u v^{n_k} u^{\varepsilon_2}$ est unique.

On définit une partition (I, J, K) de G de la façon suivante :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(v^2u)^n \in I$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(v^2u)^n \in J$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $vu(v^2u)^n \in K$,
- les autres éléments de G qui ne sont pas d'une des trois formes précédentes appartiennent à I, J, K respectivement suivant que leur décomposition commence à gauche par u, v, v^2 respectivement.

(3) Montrer que $J = vI$, $K = vJ$ et $I = u(J \cup K)$.

Soit
$$D = \{x \in S \mid \exists r \in G \setminus \{I_3\}, r(x) = x\}.$$

(4) Montrer que D est une partie dénombrable de S, stable par G.

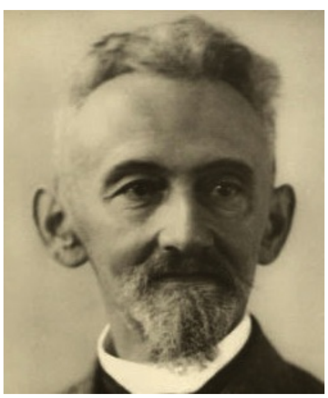
On définit une relation d'équivalence sur $S \setminus D$ de la façon suivante
$$x \sim y \Leftrightarrow \exists r \in G, r(x) = y.$$

(5) Montrer que $\sim$ est bien une relation d'équivalence sur $S \setminus D$.

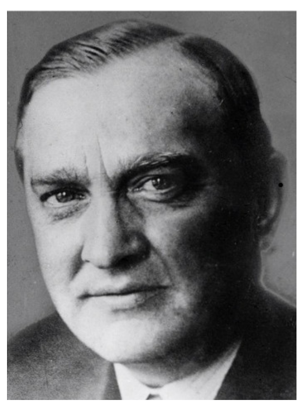
Soit T une partie de S construite en choisissant un élément de $S \setminus D$ dans chaque classe d'équivalence.

(6) Montrer que $A = I(T)$, $B = J(T)$ et $C = K(T)$ vérifient la conclusion du théorème de Hausdorff : $S \setminus D = A \sqcup B \sqcup C$, $C = v(B)$, $B = v(A)$ et $A = u(B \cup C)$.

Quelques extraits de Wikipédia.



Felix Hausdorff (1868-1942)



Stefan Banach (1892-1945)

Alfred Tarski (1901-1983)

Felix Hausdorff est un mathématicien allemand. Considéré comme l'un des fondateurs de la topologie moderne, il contribua aussi significativement à la théorie des ensembles, à la théorie de la mesure et à l'analyse fonctionnelle.
Stefan Banach est un mathématicien polonais. Ses travaux ont surtout porté sur l'analyse fonctionnelle dont il est l'un des fondateurs.
Alfred Tarski est un logicien et un philosophe polonais.