Université Grenoble Alpes

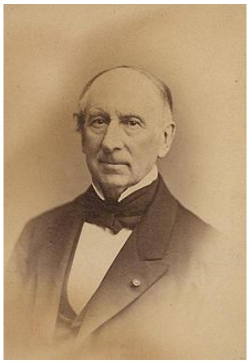
Préparation à l'Agrégation interne 2022-2023.
Mercredi 14 Décembre 2022.
Equations différentielles, linéaires et non linéaires.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les paragraphes 12.2 et 10.9 du programme officiel.

Quelques extraits de Wikipédia.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Rudolph Lipschitz (1832-1903)

Augustin Louis, baron Cauchy, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Il est l'un des mathématiciens les plus prolifiques de l'histoire avec près de 800 parutions et sept ouvrages. Ses recherches couvrent l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque.

Rudolph Lipschitz est un mathématicien allemand. Lipschitz a laissé son nom aux applications dont les variations sont contrôlées linéairement par celles de la variable (application lipschitzienne). En réalité, son travail s'étend sur des domaines aussi variés que la théorie des nombres, l'analyse, la géométrie différentielle et la mécanique classique, en particulier la résolution des équations du mouvement dans le formalisme d'Hamilton-Jacobi. Son travail sur les équations différentielles vient préciser les résultats obtenus par Cauchy. Lipschitz a en outre donné un critère de convergence des développements en série de Fourier.

Vrai/Faux

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux affirmations suivantes.

(1) Soit q une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors, il existe une unique fonction y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) + q(x)y(x) = 0 \text{ et } y(0) = y(1) = 0.$$

(2) Soit ω un réel > 0. Alors toutes les solutions de l'équation différentielle
$$y'' + \omega^2 y = 1$$
sont bornées sur $\mathbb{R}$.

(3) Soit ω un réel > 0. Alors toutes les solutions de l'équation différentielle
$$y'' - \omega^2 y = 1$$
sont bornées sur $\mathbb{R}$.

(4) Soit ω un réel > 0. Alors toutes les solutions de l'équation différentielle
$$y'' + \omega^2 y = \cos(2x)$$
sont bornées sur $\mathbb{R}$.

(5) Soit a une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = e^x$ est une droite vectorielle.

(6) L'équation différentielle $y' = y(y-1)(y-3)^2$ possède une infinité de solutions constantes.

(7) Soit $y\ : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy
$$y' = y(y-1)(y-3)^2 \text{ et } y(0) = 2.$$
Alors,
$$\forall x \in I,\ y(x) \in]1, 3[.$$

(8) Soit $y\ : I \to \mathbb{R}$ la solution maximale du problème de Cauchy
$$y' = y(y-1)(y-3)^2 \text{ et } y(0) = 2.$$
Alors $I = \mathbb{R}$.

(9) Soit (E) l'équation différentielle $y''' - y' + 7y = 0$. Alors, le Wronskien d'une famille de trois solutions de (E) est une fonction constante non nulle.

(10) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle $y' \sin(y) = x$ possède une unique solution locale vérifiant $y(0) = a$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Dans cette partie, je développe les idées de la démonstrations du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas linéaire et dans le cas non linéaire autonome. Lors de la séance de cours, je me focaliserai sur les parties IV, V et VI, les trois premières étant plus classiques et sans doute déjà abordées lors de la préparation.

Partie I. *Un théorème de point fixe.*

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé complet. Soit A une partie fermée de E. Soit $f\ : A \to A$ une application contractante : il existe $k \in [0,1[$ tel que

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|.$$

(1) Montrer que f possède au plus un point fixe $a \in A$.

(2) Soient $x_0 \in A$ et (x_n) la suite définie par : $\forall n \geq 0,\ x_{n+1} = f(x_n)$.

  (a) Montrer que la suite (x_n) est bien définie et à valeurs dans A.

  (b) Montrer que pour tout $n \geq 0$: $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$. En déduire que la suite (x_n) est de Cauchy.

  (c) En déduire que la suite (x_n) converge dans A. Que peut-on dire alors de la limite de (x_n) ?

(3) En déduire que f possède un unique point fixe $a \in A$.

(4) Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé complet. Soit A une partie fermée de E. Soit $h\ : A \to A$ une application dont un itéré est contractant :

$$\exists m \in \mathbb{N}^*,\ \exists k \in [0,1[\,,\ \forall (x,y) \in A^2,\ \|h^{\circ m}(x) - h^{\circ m}(y)\| \leq k\|x-y\|.$$

Montrer que h possède un unique point fixe $a \in A$.

Partie II. *Un espace vectoriel normé complet.*

Soient $a < b$ deux réels fixés et F un espace vectoriel de dimension finie que l'on munit d'une quelconque de ses normes $\| \ \|$. Soit $E = \mathcal{C}\big([a,b], F\big)$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \|f(x)\|.$$

Montrer que $(E, \| \ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet. *Indication :* on rappelle que F est lui-même complet.

Partie III. *Une démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.*

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A\ : I \to M_n(\mathbb{R})$ une application continue, $B\ : I \to \mathbb{R}^n$ une application continue. On considère le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X'(t) & = & A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) & = & X_0 \end{array} \right.$$

(1) Montrer que $X\ : I \to \mathbb{R}^n$ est solution si et seulement si

$$\forall t \in I,\ X(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)X(s) + B(s)\big)\,\mathrm{d}s.$$

(2) Soit $[a,b]$ un segment inclus dans I et contenant t_0. On munit $\mathbb{R}^n$ d'une quelconque de ses normes $\| \ \|$, $\mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ de la norme de la convergence uniforme et $M_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle définie par : $\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \|A\| = \sup\limits_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

Soit $T\ : \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big) \to \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big)$ l'application définie par :

$$\forall X \in \mathcal{C}\big([a,b], \mathbb{R}^n\big),\ \forall t \in [a,b],\ \big(T(X)\big)(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(s)X(s) + B(s)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note $T^m = T^{\circ m}$ le m-ième itéré de T.

(a) Montrer que le réel $M = \sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\|$ est bien défini.

(b) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [a,b]$ et pour tout $X, Y \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}^n\big)$:

$$\big\|\big(T^m(X)\big)(t) - \big(T^m(Y)\big)(t)\big\| \leq \frac{|t-t_0|^m M^m}{m!}\|X-Y\|_\infty.$$

En déduire que pour m assez grand, T^m est contractant.

(c) En déduire que le problème de Cauchy ci-dessus possède une unique solution sur $[a,b]$.

(3) En déduire que le problème de Cauchy ci-dessus possède une unique solution sur I.

Partie IV. *Un deuxième espace vectoriel normé complet.*

Soient $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$ deux segments de $\mathbb{R}$, soit $E = \mathcal{C}\big(I,J\big)$ que l'on munit de la norme de la convergence uniforme :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|f(x)\|.$$

Montrer que $(E, \|\ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.

Partie V. *Une démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire autonome.*

Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
On considère le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & f\big(x(t)\big) \\ x(0) & = & x_0 \end{array}\right.$$

(1) Montrer que $x\ : I \to \mathbb{R}$ est solution sur un intervalle I si et seulement si

$$\forall t \in I,\ x(t) = x_0 + \int_0^t f\big(x(s)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Soient $M = \sup_{x\in[x_0-1,x_0+1]} |f(x)|$ et $k = \sup_{x\in[x_0-1,x_0+1]} |f'(x)|$

(2) Montrer que M et k sont bien définis.

Soit $T\ : \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[x_0-1,x_0+1]\big) \to \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[x_0-1,x_0+1]\big)$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[x_0-1,x_0+1]\big),\ \forall t \in [-\tau,\tau],\ \big(T(x)\big)(t) = x_0 + \int_0^t f\big(x(s)\big)\,\mathrm{d}s.$$

(3) Montrer que si $\tau \leq 1/M$, on a bien

$$\forall x \in \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[x_0-1,x_0+1]\big),\ T(x) \in \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[x_0-1,x_0+1]\big).$$

On suppose dans toute la suite que $\tau \leq 1/M$.

(4) Montrer pour tout $t \in [-\tau,\tau]$ et pour tout $x, y \in \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[x_0-1,x_0+1]\big)$:

$$\big|\big(T(x)\big)(t) - \big(T(y)\big)(t)\big| \leq \tau k \|x-y\|_\infty.$$

(5) En déduire que le problème de Cauchy ci-dessus possède une unique solution sur $[-\tau,\tau]$ dès que $\tau < \min(1/M, 1/k)$.

Partie VI. *Un exemple où tout se calcule à la main !*

Soit (y_n) la suite de fonctions définies par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y_0(t) = 1$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ y_{n+1}(t) = 1 + \int_0^t y_n^2(s)\,\mathrm{d}s.$$

(1) En supposant que la suite (y_n) converge, deviner sa limite à l'aide des parties précédentes.

(2) (a) Montrer que pour tout n, y_n est un polynôme. Déterminer son degré d_n.

(b) En écrivant

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{d_n} a_k t^k,$$

montrer que $a_k \in [0,1]$ pour tout $k \in [\![0, d_n]\!]$ et que $a_k = 1$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

(c) En déduire que la suite (y_n) converge uniformément vers une fonction très simple sur tout segment de la forme $[-\tau, \tau]$ avec $0 \leq \tau < 1$.

(3) Déterminer un τ explicite pour lequel l'application $T : \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[0,2]\big) \to \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[0,2]\big)$ définie par :

$$\forall y \in \mathcal{C}\big([-\tau,\tau],[0,2]\big),\ \forall t \in [-\tau,\tau],\ \big(T(y)\big)(t) = 1 + \int_0^t y^2(s)\,\mathrm{d}s$$

soit contractante.

Partie VII. *Le théorème de Cauchy-Lipschitz de l'Agrégation Interne*

Théorème A. (Cauchy-Lipschitz dans le cas $\mathcal{C}^1$)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in U$, le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & f\big(t, x(t)\big) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

possède unique solution maximale $x : I \to \mathbb{R}^n$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant t_0.

Les cas $n = 2$ et $n = 3$ sont mis en avant dans le programme de l'Agrégation Interne, ainsi que la conséquence suivante pour les équations différentielles d'ordre 2.

Théorème B. (Cauchy-Lipschitz à l'ordre 2)
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Alors, pour tout $(t_0, x_0, v_0) \in U$, le problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x''(t) & = & f\big(t, x(t), x'(t)\big) \\ x(t_0) & = & x_0 \\ x'(t_0) & = & v_0 \end{array} \right.$$

possède unique solution maximale $x : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant t_0.

On rappelle qu'une solution est dite **maximale** si elle n'est pas la restriction d'une solution définie sur un intervalle plus grand.

Ci-dessous, sous forme d'exercice, quelques précisions supplémentaires.

(1) Montrer que le théorème A implique le théorème B.

Dans les deux questions suivantes, on suppose que f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(2) Montrer que l'intervalle de définition d'une solution maximale de $x' = f(t,x)$ est un intervalle ouvert.

(3) Montrer que si l'intervalle de définition I d'une solution maximale de $x' = f(t,x)$ est de la forme $I =]\alpha, \beta[$ avec $\beta \in \mathbb{R}$, alors x n'est pas bornée au voisinage de β. *Indication : raisonner par l'absurde et en écrivant que*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(x))\,\mathrm{d}s,$$

montrer que x se prolonge en β.

Le lemme de Gronwall et quelques applications

Le lemme de Gronwall est un résultat sur les "inéquations différentielles", il a plusieurs formes et possède de nombreuses applications concernant l'étude théorique d'équations différentielles que l'on ne sait pas résoudre directement, et du comportement asymptotique de leurs solutions.

Exercice 1. [Lemme de Gronwall, version différentielle]

(1) Soit $r\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $a\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :
$$\forall t\geq 0,\ r'(t)\leq a(t)r(t).$$
Démontrer que
$$\forall t\geq 0,\ r(t)\leq r(0)\exp\left(\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right).$$

(2) Dans cette question, $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne classique. Pour $M\in M_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|=\sup\limits_{X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\dfrac{\|MX\|}{\|X\|}$.
Soit $A:\mathbb{R}^+\to M_n(\mathbb{R})$ une fonction continue telle que
$$\int_0^{+\infty}\|A(t)\|\mathrm{d}t<+\infty.$$
Soit $u\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ une solution de $u'(t)=A(t)u(t)$ avec $u(0)=u_0\in\mathbb{R}^n$.

(a) On pose $r(t)=\|u(t)\|^2$. Montrer que r vérifie une inéquation différentielle. En déduire que r est bornée.

(b) En déduire que u possède une limite en $+\infty$ notée u_∞.

(c) Montrer que l'application $u_0\mapsto u_\infty$ est un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$.
Indication : considérer le Wronskien d'un système fondamental de solutions de l'équation $u'(t)=A(t)u(t)$.

Exercice 2. [Lemme de Gronwall, version intégrale]

(1) Soient $f\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue, $a\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs ≥ 0 et M un réel tels que
$$\forall t\geq 0,\ f(t)\leq M+\int_0^t a(s)f(s)\mathrm{d}s.$$
Montrer que
$$\forall t\geq 0,\ f(t)\leq M\exp\left(\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right).$$

(2) Soit $q\ :\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ une fonction continue, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Soit (E) l'équation différentielle
$$y''+\big(1+q(x)\big)y=0.$$

(a) Soient y une solution de (E) et z la fonction définie par
$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ z(x)=y(x)+\int_0^x\sin(x-t)q(t)y(t)\mathrm{d}t.$$
Montrer que z est de classe $\mathcal{C}^2$ et est solution d'une équation différentielle à coefficients constants très simple.

(b) En déduire qu'il existe une constante M telle que
$$\forall t\in\mathbb{R}^+,\ |y(x)|\leq M+\int_0^x |q(t||y(t)|\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire que y est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

(d) *Question subsidiaire.* D'où vient la fonction z ?

Trois exemples d'études qualitatives

Voici trois exercices autour des études qualitatives des solutions d'EDL non linéaires. Les deux premiers sont "faciles", le suivant l'est moins.

Exercice 3. [Etude qualitative]
Soit

$$(E)\ :\ y' = x^2 + y^2.$$

(1) Justifier l'existence d'une unique solution maximale y de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

(2) Justifier que y est une fonction impaire. *Indication : introduire $z(x) = -y(-x)$ et déterminer un problème de Cauchy dont z est solution...*

(3) Etudier la monotonie et la concavité de y.

(4) Montrer que y est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

(5) Dresser le tableau de variation de y.

Exercice 4. [Etude qualitative]

(1) Montrer que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & \dfrac{1}{1+xy} \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

possède une solution maximale y unique.

(2) Montrer que celle-ci est impaire et strictement croissante.

(3) Montrer qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$.

(4) Déterminer la limite de y en $+\infty$.

Exercice 5. [X/ESPCI 2017, PC]
Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$u'' + f(u) = 0,\ u(1) = u(-1) = 0 \text{ et } u > 0 \text{ sur }]-1, 1[\,.$$

(1) Montrer que u est paire.

(2) Montrer que u' est de signe constant sur $]-1, 0]$ et sur $[0, 1[$.

Fourier et équations différentielles

Voici quatre exercices mélant Fourier et ED. Les trois premiers se placent dans le cadre linéaire, le dernier dans un cadre non linéaire.

Exercice 6. [Faire ses gammes]
Déterminer les solutions 2π-périodiques de l'équation différentielle

$$y'' + e^{it} y = 0.$$

Exercice 7. [Faire ses gammes]
Soient $\alpha \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$ et $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Soit y une solution de

$$y' + \alpha y = f.$$

(1) Montrer que y est 2π-périodique si et seulement si $y(0) = y(2\pi)$.
(2) En déduire qu'il existe unique solution 2π-périodique y de l'équation différentielle $y' + \alpha y = f$ et déterminer son développement de Fourier complexe en fonction de celui de f.

Exercice 8. [Faire ses gammes]
Montrer que l'équation différentielle

$$y^{(4)} + y'' + y = |\sin(x)|$$

possède une unique solution π-périodique.

Exercice 9. [Parseval et équations différentielles]

(1) *Fourier pour des fonctions T-périodiques.*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, continue par morceaux.
  (a) Vérifier que la fonction $t \mapsto g(t) = f\left(\dfrac{T}{2\pi} t\right)$ est 2π-périodique.
  (b) On définit les coefficients de Fourier de f par les formules

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-2in\pi t/T} \mathrm{d}t$$

  et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t\ ;\ b_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t.$$

  Définir la série de Fourier de f, énoncer le théorème de convergence normale, le théorème de Dirichlet et la formule de Parseval pour les fonctions T-périodiques.

(2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, que l'on suppose k-lipschitzienne. On s'intéresse aux solutions maximales de l'équation différentielle $y' = f(y)$.
  (a) Montrer que toutes les solutions maximales de $y' = f(y)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
  (b) Montrer que si y est une solution T-périodique de $y' = f(y)$, alors

$$T \geq \frac{2\pi}{k}.$$

  Indication : on pourra montrer que

$$\iint_{[0,T]^2} |y'(s) - y'(t)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}s \leq k^2 \iint_{[0,T]^2} |y(s) - y(t)|^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

  puis développer y en série de Fourier.

Un premier problème de préparation à l'écrit (Nouveauté 2022-2023)

Préambule. Ce problème étudie les solutions d'une EDL de façon qualitative. La Partie I est facile et permet de réviser les séries entières, les séries alternées et le calcul intégral. La Partie II est calculatoire sans être très difficile mais peut être sautée si vous manquez de temps. Je vous conseille en revanche de réfléchir à la Partie III qui traite des zéros des EDLs d'ordre 2 : les techniques développées dans cette partie s'appliquent dans de nombreuses situations.

Ce sujet a pour objet l'étude qualitative des propriétés des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'' + e^t y = 0.$$

Les trois parties de ce problème sont très largement indépendantes.

(0) Quelle est la structure de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) ?

Partie I. Etude sur $\mathbb{R}^-$ des solutions de (E)

Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n.$$

(1) Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

(2) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = S(e^t)$.
  - (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
  - (b) Montrer que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
  - (c) Déterminer $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$.
  - (d) Montrer que :
$$\forall t \in \mathbb{R}^-,\ f(t) > 0.$$
  - (e) Déterminer le signe de $f'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^-$. En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^-$.

(3) Pour $t \in \mathbb{R}^-$, on pose
$$g(t) = f(t) \int_t^0 \frac{\mathrm{d}u}{f^2(u)}.$$
  - (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^-$.
  - (b) Montrer que g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}^-$.
  - (c) Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}^-$.
  - (d) Montrer que $g(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} -t$.

(4) Montrer que la famille (f, g) est une base de l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^-$.

(5) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^-$ qui sont bornées sur $\mathbb{R}^-$.

Partie II. Etude asymptotique en $+\infty$ des solutions de (E)

Soit $y\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (E). Soit $z\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t) = y(t)e^{t/5}.$$

(1) Exprimer y, y' et y'' en fonction de z, z' et z''. Puis exprimer z en fonction de z' et z''.

(2) En déduire que
$$\forall t \geq 0,\ z^2(t) = z^2(0) + \frac{4}{5}\int_0^t \frac{z'^2(u)\,\mathrm{d}u}{e^u + 1/25} - \int_0^t \frac{2z'(u)z''(u)\,\mathrm{d}u}{e^u + 1/25}.$$

(3) En déduire que
$$\forall t \geq 0,\ z^2(t) = z^2(0) + \frac{25}{26}z'^2(0) - \frac{z'^2(t)}{e^t + 1/25} - \frac{1}{5}\int_0^t \frac{e^u - 4/25}{(e^u + 1/25)^2} z'^2(u)\,\mathrm{d}u.$$

(4) En déduire que

$$\forall t \geq 0,\ |y(t)| \leq e^{-t/5}\sqrt{z^2(0) + \frac{25}{26}z'^2(0)}.$$

puis la limite de y en $+\infty$.

Partie III. Etude des zéros sur $\mathbb{R}^+$ des solutions de (E)

(1) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E). On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$. Montrer que y est la fonction nulle.

(2) En déduire que si y est une solution non identiquement nulle de (E) s'annulant en un point $t_0 \in \mathbb{R}$, alors y change de signe en t_0.

(3) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E). On suppose qu'il existe un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que y s'annule une infinité de fois sur $[a, b]$.
Montrer que y est la fonction nulle.

(4) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E). On suppose que y ne s'annule pas sur $]0, \pi]$. Soit

$$t \mapsto W(t) = y(t)\cos(t) - y'(t)\sin t.$$

  (a) Montrer que W est strictement monotone sur $]0, \pi]$.

  (b) Aboutir à une contradiction en comparant $y(0)$ et $y(\pi)$.

(5) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E). On suppose que y n'est pas la fonction nulle.
Déduire des questions précédentes que y possède un plus petit zéro strictement positif appartenant à $]0, \pi]$.

(6) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E). On suppose que y n'est pas la fonction nulle et on note t_1 le plus petit zéro strictement positif de y.

  (a) Soient

$$z : t \mapsto z(t) = \sin\left(e^{t_1/2}(t - t_1)\right) \text{ et } W : t \mapsto W(t) = y(t)z'(t) - y'(t)z(t).$$

  En imitant le raisonnement des questions (4) et (5), montrer qu'il existe un plus petit zéro t_2 strictement supérieur à t_1 appartenant à $]t_1, t_1 + e^{-t_1/2}\pi]$.

  (b) Montrer que les zéros strictement positifs de y peuvent être classés en une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante de limite $+\infty$ telle que $t_{n+1} - t_n \leq e^{-t_n/2}\pi$ pour tout $n \geq 1$.

  (c) Montrer enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty}(t_{n+1} - t_n) = 0$.

(7) Tracer l'allure du graphe de la fonction f introduite en $I(2)$.

Un deuxième problème de préparation à l'écrit (Nouveauté 2022-2023)

Préambule. Ce problème étudie les solutions d'une ED non linéaire de façon qualitative. Ce sujet est un peu plus délicat que le précédent mais permet de travailler un peu avec les fonctions à valeurs complexes. Il utilise aussi les techniques usuelles du calcul intégral.

Soit $\alpha > 0$. On dit que f est une solution de l'équation (E_α) si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et

$$(E_\alpha) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + \frac{ix}{2} f'(x) + \frac{f(x)}{2}(\alpha |f(x)|^2 + 1) = 0.$$

On suppose qu'il existe une solution f de (E_α) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

(1) On pose $f_1 = \Re(f)$ et $f_2 = \Im(f)$ où, pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z)$ et $\Im(z)$ désignent les parties réelle et imaginaire de z.
Exprimer f_1'' et f_2'' en fonction de f_1', f_2', f_1 et f_2.

(2) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)|^2 + \frac{1}{4\alpha}(\alpha |f(x)|^2 + 1)^2 = \frac{1}{4\alpha}(\alpha + 1)^2.$$

(3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq 1$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\alpha + 1).$$

(4) Le but de cette question est de démontrer qu'il existe $(\ell, M_0) \in \mathbb{R}_+^2$ tel que

$$\forall x > 0,\ \left||f(x)|^2 - \ell\right| \leq \frac{M_0}{x}.$$

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right) + \frac{x}{4}|f(x)|^2 - \frac{1}{4}\int_0^x |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = 0.$$

(b) Montrer que

$$\forall x > 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t\right) = -\frac{4}{x^2}\Im\left(f'(x)\overline{f(x)}\right).$$

(c) En déduire qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t = \ell.$$

(d) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x > 0,\ \left|\frac{1}{x}\int_0^x |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t - \ell\right| \leq \frac{M}{x}.$$

(e) Conclure.

(5) (a) On suppose dans cette question que $\ell = 1$. Montrer qu'il existe $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x > 0,\ \left||f(x)|^2 - 1\right| \leq \frac{M_1}{x^{3/2}}.$$

(b) En déduire que $\ell < 1$.