Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2022-2023.
Mercredi 12 Octobre 2022.
Réduction des endomorphismes.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Leçons concernées

Le contenu de cette séance concerne les leçons de la séance précédente auxquelles se rajoutent les leçons suivantes.
110. Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
151. Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
156. Valeurs propres. Recherche et utilisation.
163. Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
172. Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications.
315. Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
317. Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
319. Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.
348. Exercices utilisant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
357. Exercices utilisant le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Révisions de cours

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les chapîtres 5.7 et 5.8 du programme officiel, en plus des chapîtres 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 utilisés lors de la séance précédente.
Voici un quizz qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions. Vous devez être capables de justifier chaque affirmation Vraie et donner un contre-exemple ou un énoncé corrigé pour chaque affirmation fausse.

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux affirmations suivantes.

(1) Deux matrices carrées d'ordre n ayant même trace et même déterminant sont semblables.
(2) Un vecteur a non nul est un vecteur propre d'un endomorphisme u si et seulement si la droite $\mathrm{Vect}(a)$ est u-stable.
(3) Le noyau d'un endomorphisme non injectif est un sous-espace propre.
(4) Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie possède toujours au moins un vecteur propre.
(5) Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie possède toujours au moins un vecteur propre.

(6) Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une matrice carrée ont les mêmes racines.

(7) Le polynôme minimal d'une matrice carrée est un multiple de son polynôme caractéristique.

(8) Toute racine d'un polynôme annulateur d'une matrice carrée A est une valeur propre de A.

(9) Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, pour tout endomorphisme u d'un espace vectoriel E, on a
$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) \cap \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big) = \{0_E\}.$$

(10) Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

(11) Une matrice possédant une unique valeur propre est diagonalisable.

(12) Une matrice dont toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1 est diagonalisable.

(13) Une matrice carrée vérifiant $A^3 = A$ est diagonalisable.

(14) Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^k = P^k D^k P^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(15) Une matrice carrée vérifiant $A^4 = A^3$ est diagonalisable.

(16) Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^4 = A^3$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.

(17) Toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

(18) Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

(19) La seule matrice nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.

(20) Si A et B sont nilpotentes, alors $A + B$ est nilpotente.

(21) Si A et B sont diagonalisables, alors $A + B$ est diagonalisable.

(22) Si A est une matrice diagonalisable, alors $P(A)$ est diagonalisable pour tout polynôme P.

(23) Si A est une matrice nilpotente, alors $P(A)$ est nilpotente pour tout polynôme P.

(24) Si A est une matrice nilpotente et si P est un polynôme, alors $P(A)$ est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

(25) Si A et B commutent et sont diagonalisables, alors $A^k + B^l$ est diagonalisable pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

Exercices d'application du cours

Les exercices proposés sont rangés par ordre de difficulté à peu près croissante.

Exercice 1. [Faire ses gammes]

(1) Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que A soit diagonalisable.

(2) Même question pour
$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. [Faire ses gammes]
Soit A une matrice de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Les deux exercices suivants présentent deux applications de la diagonalisabilité d'une matrice (résolution d'un système différentiel d'une part, étude du comportement asymptotique d'une expérience probabiliste simple d'autre part).

Exercice 3. [Réduction et systèmes différentiels]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que A est diagonalisable. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. *On ne demande pas de déterminer P^{-1} dans cette question.*

(2) *Cette question peut se traiter sans effectuer le calcul de P^{-1}.*
Soient $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel suivant
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -x(t) + y(t) \\ y'(t) & = & -3x(t) - 2y(t) - 3z(t) \\ z'(t) & = & -3x(t) - 2y(t) - 3z(t) \end{array} \right.$$
On note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ son vecteur dérivé.

(a) Trouver une expression simple reliant $X(t)$, $X'(t)$ et A.

On définit trois nouvelles fonctions $t \mapsto u(t)$, $t \mapsto v(t)$ et $t \mapsto w(t)$ par la formule
$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t).$$

(b) Montrer que $Y'(t) = DY(t)$ (*indication : on observera que $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$*).

(c) En déduire que u, v et w sont chacune solution d'une équation différentielle très simple. En déduire l'expression générale des fonctions u, v et w puis celle des fonctions x, y et z.

(3) (a) Déterminer P^{-1}.

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ puis calculer e^{tA}.

(c) Retrouver le résultat de la question (2c).

Exercice 4. [Faire ses gammes]
On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules vertes.
On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est donc un échange de 2 boules).
Pour tout entier n, on note X_n le nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)$-ième tirage (c'est-à-dire après le n-ième échange) et on a donc $X_0 = 3$.
On considère le vecteur de probabilités $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

(1) Pour chaque couple (i,j) d'éléments de $[\![0,3]\!]$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)$. *On distinguera les cas $j=i-1$, $j=i$, $j=i+1$ et $j \notin [\![i-1,i+1]\!]$.*

(2) En déduire soigneusement que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Y_{n+1} = \frac{1}{9} M Y_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) Montrer que M est diagonalisable, déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Déterminer P^{-1} *à l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.*

(b) En déduire la limite de la suite de matrices $\left(\frac{1}{9^n} M^n\right)_{n\geq 0}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *Il n'est pas utile de déterminer l'expression de M^n pour traiter cette question.*

(4) Déterminer la limite du vecteur Y_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis la valeur moyenne (ou espérance) limite du nombre de boules blanches présentes dans l'urne 1 et commenter le résultat obtenu. *Il n'est pas utile de déterminer l'expression de Y_n pour traiter cette question.*

Du calcul par blocs illustré sur deux situations simples.

Exercice 5. [Encore un classique]
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

(1) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, calculer $P(B)$.

(2) En déduire que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

(3) Soit $C = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que C est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Une nouvelle application de la diagonalisabilité à la résolution d'une équation matricielle.

Exercice 6. [Equation matricielle]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer qu'il existe $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^5 + M^3 + M = A$.

(3) Montrer que toute matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^5 + M^3 + M = A$ est diagonalisable.

(4) En déduire qu'il existe une unique matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^5 + M^3 + M = A$. Que se passe-t-il sur $\mathbb{C}$?

Tout est dans le titre !

Exercice 7. [Décomposition de Dunford-Jordan de e^M]
On rappelle le résultat suivant : *pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple de matrices (D,N) tel que D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$ et $M = D + N$.*
Cette décomposition est la décomposition de Dunford-Jordan de M.

(1) Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = D + N$ sa décomposition de Dunford-Jordan.

(a) Montrer que e^D est diagonalisable.

(b) Montrer que $e^N - I_n$ est nilpotente.

(c) Déterminer la décomposition de Dunford-Jordan de e^M.

(2) Résoudre l'équation $e^M = I_n$.

Les deux exercices suivants permettent de travailler un peu avec des matrices à coefficients à valeurs dans des corps finis. Ils sont plus délicats que les précédents et nécessitent une bonne maîtrise de l'arithmétique modulo p.

Exercice 8. [Matrices modulo p]
Soient p un nombre premier impair et

$$S = \{A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \mid \mathrm{tr}(A) = 2,\ \det(A) = 1\}.$$

(1) Déterminer le nombre de classes de similitude d'éléments de S.

(2) Déterminer le cardinal de S (*indication : on pourra compter à la main le nombre de matrices nilpotentes*).

(3) Pour $A \in S \setminus \{I_2\}$, montrer que

$$\{P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \mid PAP^{-1} = A\}$$

est un groupe cyclique (*indication : si a est un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$, déterminer l'ordre de* $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$).

Exercice 9. [Sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$]
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Pour $p \geq 3$ premier, montrer que la réduction modulo p injecte G dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Un (petit) problème de préparation à l'écrit

Cet exercice est adapté d'un problème posé à l'agrégation externe.

(1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $u_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ u_A(M) = AM.$$

(a) Si P est un polynôme, déterminer $P(u_A)$. En déduire que A et u_A ont même polynôme minimal.

(b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si u_A est diagonalisable.

(c) Montrer que A est nilpotente si et seulement si u_A est nilpotent.

(d) Montrer que A est une matrice de projecteur si et seulement si u_A est un projecteur.

(e) Montrer que A est une matrice de symétrie si et seulement si u_A est une symétrie.

(f) Montrer que A est inversible si et seulement si u_A est un automorphisme de $M_n(\mathbb{C})$. Déterminer u_A^{-1} lorsque A est inversible.

(g) Soit $A = D_A + N_A$ la décomposition de Dunford-Jordan de A.
Déterminer la décomposition de Dunford-Jordan de u_A.

(2) Soit $B \in M_n(\mathbb{C})$. On note $v_B : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ v_B(M) = MB.$$

Adapter rapidement à v_B les résultats démontrés pour u_A.

(3) Montrer que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $u_A \circ v_B = v_B \circ u_A$.

(4) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Soit φ l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \varphi(M) = AM + MB.$$

(a) Montrer que si A et B sont diagonalisables, alors φ est diagonalisable.

(b) Déterminer la décomposition de Dunford-Jordan de φ en fonction de celles de A et de B.

(c) En déduire que si φ est diagonalisable, alors A et B sont diagonalisables.

Nouveauté 2022-2023. Un (moins petit) problème de préparation à l'écrit

Réduction de Jordan et théorème du bicommutant (librement inspiré d'un problème d'agrégation, session 20

Partie I. Réduction de Jordan.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n = \dim(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

Définition. On dit qu'un sous-espace vectoriel V de E est u-cyclique si V est u-stable et s'il existe $x \in V$ tel que $\big(x, u(x), \dots, u^{\dim(V)-1}(x)\big)$ soit une base de V.

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $n = \dim(E)$: $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

(a) Démontrer que E est u-cyclique.

(b) Soit $\beta = \big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ une base de E dont l'existence vient d'être prouvée.
Déterminer la matrice de u dans la base β.
Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}\big(u^{n-1}(x)\big)$.

Dans la question (2), on démontre le résultat suivant par récurrence forte sur $\dim(E)$.

Théorème. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Alors il existe des sous-espaces vectoriels u-cycliques $F_1, \dots, F_p$ de E tels que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.*

(2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. Le cas où $\dim(E) = 1$ est clair. Pour le passage des rangs $1, \dots, n-1$ au rang n, on applique l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit $u_{|\operatorname{Im}(u)} : \operatorname{Im}(u) \to \operatorname{Im}(u)$. On écrit donc $\operatorname{Im}(u) = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$ et pour chaque k, on se donne une base $\big(y_k, u(y_k), \dots, u^{m_k-1}(y_k)\big)$ de F_k. On écrit enfin $y_k = u(x_k)$ avec $x_k \in E$.

(a) Démontrer que $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Vect}\big(u^{m_k-1}(y_k),\ 1 \leq k \leq p\big)$.

(b) Soient H un supplémentaire de $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u)$ dans $\operatorname{Ker}(u)$ et, pour $1 \leq k \leq p$:

$$G_k = \operatorname{Vect}\big(x_k, u(x_k), \dots, u^{m_k}(x_k)\big).$$

Montrer que $E = \left(\bigoplus_{k=1}^{p} G_k\right) \oplus H$.

(c) Conclure.

(3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E, que l'on ne suppose plus nilpotent.
Déduire de la question précédente qu'il existe une base de E de sorte que la matrice de u dans cette base soit diagonale par blocs, les blocs étant tous de la forme

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{C})$$

avec la convention $J_1(\lambda) = (\lambda) \in M_1(\mathbb{C})$.

Remarque. Le résultat précédent contient bien sûr le théorème vu en cours qui affirme que toute matrice possède une décomposition de Dunford-Jordan.

(4) *Application numérique.* On suppose E de dimension 4. Soit $u \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tel que $u^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base β de E tel que la matrice de u dans la base β soit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Partie II. Bicommutant d'un endomorphisme.

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n = \dim(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid v \circ u = u \circ v\},\ \mathcal{CC}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid \forall w \in \mathcal{C}(u),\ v \circ w = w \circ v\}$$

et

$$\mathbb{C}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

On dit que $\mathcal{C}(u)$ est le commutant de u, que $\mathcal{CC}(u)$ est le bicommutant de u. De même, on définit $\mathcal{C}(M)$, $\mathcal{CC}(M)$ et $\mathbb{C}[M]$ pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$.

On note enfin π_u le polynôme minimal de u.

(1) Montrer que

$$\mathbb{C}[u] \subset \mathcal{CC}(u) \subset \mathcal{C}(u).$$

(2) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $n = \dim(E)$: $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Soit $x \in E$ tel que $\beta = \big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big)$ une base de E. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$.

(a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $v(x) = P(u)(x)$.

(b) Montrer que $v = P(u)$.

(c) En déduire que $\mathbb{C}[u] = \mathcal{C}(u)$.

(3) Soit $u = \lambda \mathrm{Id}_E$, $\lambda \in \mathbb{C}$, une homothétie. Montrer que $\mathbb{C}[u] = \mathcal{CC}(u)$.

Le but de ce qui suit est de démontrer le théorème du bicommutant.

Théorème. *Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbb{C}[u] = \mathcal{CC}(u)$.*

(4) Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec A et B des matrices carrées de taille respective p et q. On suppose que $\mathbb{C}[A] = \mathcal{CC}(A)$, que $\mathbb{C}[B] = \mathcal{CC}(B)$ et que π_A et π_B sont premiers entre eux.

(a) En remarquant que $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ commute avec M, montrer que

$$\mathcal{CC}(M) \subset \left\{ \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & Q(B) \end{pmatrix} \mid P, Q \in \mathbb{C}[X] \right\}.$$

(b) En déduire que $\mathbb{C}[M] = \mathcal{CC}(M)$.

(5) Soit $n \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. D'après la Partie I, il existe une base $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ de E, de la forme $\beta_i = \big(x_i, n(x_i), \dots, n^{m_i - 1}(x_i)\big)$, et des matrices blocs $J_{k_1}(0), \dots, J_{m_p}(0)$ tels que la matrice de n dans la base β soit égale à

$$N = \begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(0) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & J_{m_p}(0) \end{pmatrix}.$$

On peut supposer de plus que $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_p$, ce que l'on fera dans la suite.
Soit $w \in \mathcal{CC}(n)$.

(a) En raisonnant de façon analogue à la question (4a), montrer qu'il existe des polynômes $P_1, \ldots, P_d$ tels que la matrice W de w dans la base β soit égale à

$$W = \begin{pmatrix} P_1\big(J_{m_1}(0)\big) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_2\big(J_{m_2}(0)\big) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & P_p\big(J_{m_p}(0)\big) \end{pmatrix}.$$

(b) Montrer que pour tout $i \geq 2$, il existe $v_i \in \mathcal{C}(n)$ tel que $v_i(x_1) = x_i$ et $v_i(x_j) = 0$ pour tout $j \neq 1$.

(c) En déduire que pour tout i, $P_i(n)(x_i) = P_1(n)(x_i)$, puis que $w = P_1(n)$.

(d) En déduire que $\mathcal{CC}(n) = \mathbb{C}[n]$.

(6) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et un endomorphisme nilpotent $n \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u = \lambda \mathrm{Id}_E + n$.

(a) Montrer que $\mathcal{CC}(u) = \mathcal{CC}(n)$.

(b) En déduire que $\mathbb{C}[u] = \mathcal{CC}(u)$.

(7) Conclure la démonstration du théorème du bicommutant.

(8) Montrer que le théorème du bicommutant est encore vrai sur $\mathbb{R}$.