Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2022-2023.
Mercredi 5 Octobre 2022.
Révisions d'algèbre linéaire.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Leçons concernées

Le contenu de cette séance concerne les leçons suivantes.
107. Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
109. Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
110. Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
112. Changements de base en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.
113. Déterminants. Applications.
114. Opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.
144. Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaires. Applications.
150. Diverses factorisations de matrices. Applications.
155. Systèmes d'équations linéaires. Applications.
310. Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
311. Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
312. Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
313. Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
314. Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
353. Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.

Révisions de cours

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les paragraphes 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 du programme officiel. Voici un problème qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions : il est posé de façon très progressive et illustre une bonne partie des notions fondamentales utilisées en algèbre linéaire (matrice d'une application linéaire, déterminants, isomorphisme, image d'une base par une application linéaire, coordonnées d'un vecteur dans une base, base duale, interpolation polynomiale).

Déterminants de Vandermonde et polynômes interpolateurs de Lagrange.


Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\beta = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soient n un entier ≥ 1, $a_1, \dots, a_n$ des réels et $\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \varphi(P) = \big(P(a_1), \dots, P(a_n)\big).$$

(1) Montrer rapidement que φ est linéaire.

(2) Déterminer la matrice $A = [\varphi]_{\beta,e}$ de φ dans les bases β et e.

On note

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \det\big((a_i^{j-1})\big).$$

(3) Ecrivons

$$\prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i) = X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k X^k.$$

En effectuant l'opération élémentaire

$$C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k C_{k+1}$$

trouver une relation entre $V_n(a_1, \dots, a_n)$ et $V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$.

(4) En déduire que

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(5) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un isomorphisme.

On suppose dorénavant que les a_i sont distincts et on note pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

(6) (a) Déterminer $\varphi(L_i)$.

(b) Montrer que $\mathcal{B} = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1, \dots, L_n)$.

(c) Déterminer la base duale de $(L_1, \dots, L_n)$.

(7) Soient $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i. Exprimer ce polynôme à en fonction des b_i et des L_i.

(8) (a) Quelle est la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et e ?

(b) En déduire sans aucun calcul supplémentaire que la matrice de changement de bases de β à $\mathcal{B}$ est égale à A^{-1}. *Indication :* exploiter $\varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Un quizz (nouveauté 2022-2023)

Voici un quizz qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions. Vous devez être capables de justifier chaque affirmation Vraie et donner un contre-exemple ou un énoncé corrigé pour chaque affirmation fausse.

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux affirmations suivantes.

(1) Une réunion de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

(2) Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

(3) Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

(4) Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

(5) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Alors
$$AB = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

(6) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Alors
$$AB = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A).$$

(7) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Alors
$$A^2 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}(A).$$

(8) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Alors
$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X],\ g = P(f).$$

(9) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

(10) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

(11) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un convexe de $M_n(\mathbb{R})$.

(12) L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

(13) L'ensemble des matrices nilpotentes est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

(14) L'ensemble des matrices nilpotentes est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercices d'application du cours

Les deux premiers exercices permettent de retravailler les notions de noyau et image d'une application linéaire, de sommes (directes) de sous-espaces vectoriels et utilisent le théorème du rang.

Exercice 1. [Autour du théorème du rang]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que
$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2 \Leftrightarrow E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, f^2.$$

Exercice 2. [Faire ses gammes]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ est bijectif et $g \circ f = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = E$.

(2) En déduire que $\dim(E) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

(3) Comparer $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(g)$.
(4) En déduire finalement que $\dim(E) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.

Cet exercice très progressif utilise le théorème du rang, vous fait construire une base géométriquement adaptée à un endomorphisme nilpotent et utilise le dictionnaire application linéaire / matrice pour déterminer le commutant d'un endomorphisme.

Exercice 3. [d'après EDHEC 2015]
Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que

$$u \circ u = 0.$$

(1) Comparer (au sens de l'inclusion) $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
(2) En déduire que $\mathrm{rg}(u) \leq 2$.
(3) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(u) = 1$. Soient $e_1 \in E \setminus \mathrm{Ker}(u)$ et $e_2 = u(e_1)$.
  (a) Montrer que $e_2 \in \mathrm{Ker}(u)$ et qu'il existe e_3 et e_4 de sorte que (e_2, e_3, e_4) soit une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
  (b) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base.
(4) On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(u) = 2$.
  (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.
  (b) Soient (e_1, e_2) une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
  Montrer qu'il existe deux vecteurs e_3 et e_4 tels que $u(e_3) = e_1$ et $u(e_4) = e_2$ puis montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.
  Déterminer la matrice U de u dans cette base.
  (c) Soit
  $$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$
  le commutant de u.
  En caractérisant la matrice V d'un élément v de $\mathcal{C}(u)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

Cet exercice très élémentaire a pour seul but de vérifier que vous savez ce qu'est un projecteur ou une symétrie et que vous savez déterminer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 4. [Matrices et géométrie]
On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\big\}$$

et $D = \mathrm{Vect}(w)$ où $w = (1, 0, -1)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

(1) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}$.
(2) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}$, de q et de s.

Les deux exercices suivants sont fondamentaux et démontrent des résultats généraux sur les noyaux et images des itérés successifs d'un endomorphisme en dimension finie (le théorème du rang joue à nouveau un rôle important). Le cas des endomorphismes nilpotents d'indice de nilpotence maximal est étudié en détail.

Exercice 5. [Noyaux et images emboités]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si k est un entier naturel, on pose $K_k = \mathrm{Ker}\,(f^k)$ (comme d'habitude, $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $f^{k+1} = f^k \circ f$) et $F_k = \mathrm{Im}\,(f^k)$.

(1) Montrer que $K_k \subset K_{k+1}$ pour tout k.

(2) En déduire qu'il existe un entier $l \leq n$ tel que $K_l = K_{l+1}$.

(3) Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid K_k = K_{k+1}\}$. Montrer que pour tout $k \geq k_0$, alors $K_k = K_{k+1}$.

(4) Montrer que $F_{k+1} \subset F_k$ pour tout k.

(5) En déduire qu'il existe un entier $m \leq n$ tel que $F_m = F_{m+1}$.

(6) Soit $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_k = F_{k+1}\}$. Montrer que pour tout $k \geq k_1$, alors $F_k = F_{k+1}$.

(7) A l'aide du théorème du rang, montrer que $k_0 = k_1$.

(8) *Application numérique.* Traiter le cas de $f\ : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par $f(x, y, z, t) = (y + z, z, 0, 2t)$.

Exercice 6. [Endomorphismes nilpotents]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est **nilpotent**, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $f^m = 0$. On note $N = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$. L'entier N est appelé **indice de nilpotence de** f.

Question préliminaire. A l'aide de l'exercice précédent, montrer que $N \leq n$.
On suppose **dorénavant** que $N = n$.

(1) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

(2) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

(3) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$.

(4) Soit $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ ($C(f)$ est le **commutant** de f).

   (a) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant f^k pour tout k. En déduire que $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}) \subset C(f)$.

   (b) Soit $g \in C(f)$. On écrit $g(x_0) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0)$ dans E et on pose $h = \lambda_0 \mathrm{Id}_E + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1} \in \mathcal{L}(E)$.
   Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $g(f^k(x_0)) = h(f^k(x_0))$.
   En déduire que $g = h$.

   (c) Montrer que $C(f) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$. Quelle est la dimension de $C(f)$?

Cet exercice élémentaire vous permet d'illustrer de façon pertinente le dictionnaire application linéaire / matrices et démontre un cas très particulier d'un résultat classique : toute matrice carrée est semblable à sa transposée.

Exercice 7. [Faire ses gammes]
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\varphi\ : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = AM - M\,{}^t\!A.$$

(1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $M_2(\mathbb{R})$.

(2) En déduire le rang de φ, une base de l'image et du noyau de φ.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. En déduire que A et ${}^t\!A$ sont semblables.

Cet exercice (plus délicat que le précédent) vous permettra de revoir le calcul par blocs et de réviser une caractérisation fondamentale du rang d'une matrice : le rang d'une matrice M est égal à la taille de la plus grande matrice inversible extraite de M. Le caractère polynomial du déterminant joue aussi un rôle fondamental dans cet exercice.

Exercice 8. [Un classique]
Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{V},\ \mathrm{rg}(M) \leq r.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\dim(\mathcal{V}) \leq nr$.

(1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\mathcal{V}$ contient la matrice bloc $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

On suppose donc dorénavant que $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$.

(2) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ avec A carrée de taille r. Soit C_i une ligne de C, B_j une colonne de B et d_{ij} le coefficient de D correspondant.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{pmatrix} A + tI_r & B_j \\ C_i & d_{ij} \end{pmatrix} = 0.$$

(b) En déduire que $D = 0$ et que $CB = 0$.

(3) Montrer que l'application

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \mapsto \begin{pmatrix} A & {}^t C + B \end{pmatrix} \in M_{r,n}(\mathbb{R})$$

est injective.

(4) Conclure.

Nouveautés 2022-2023

Exercice 9. [Endomorphismes et matrices de rang 1.]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n \geq 2$.

(1) *Question préliminaire.* Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est de rang 1 si et seulement si il existe une forme linéaire φ non nulle sur E et un vecteur non nul $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x)a.$$

Soit $a \neq 0$ un vecteur non nul de E fixé dans tout le problème. Soit $\varphi\ : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle. Soit $f\ : E \to E$ l'application définie par

$$\forall x \in E,\ f(x) = \varphi(x)a.$$

(2) Démontrer que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\forall x \in E, f^k(x) = \varphi(x)\big(\varphi(a)\big)^{k-1}a.$$

Attention ici : f^k désigne le k-ième itéré de <u>l'endomorphisme</u> f, alors que $\big(\varphi(a)\big)^{k-1}$ est la puissance $(k-1)$-ième <u>du réel</u> $\varphi(a)$!

(3) Démontrer les équivalences suivantes :

$$f^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(a) = 0$$

et

$$f^2 \neq 0 \Leftrightarrow E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$

(4) <u>On suppose que $\varphi(a) \neq 0$</u>. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale suivante

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \varphi(a) \end{pmatrix}.$$

(5) On suppose que $\varphi(a) = 0$ et on considère un vecteur $b \in E$ tel que $\varphi(b) \neq 0$. Montrer qu'il existe une base e de E de la forme $e = (e_1, \dots, e_{n-2}, f(b), b)$ dans laquelle la matrice de f est la matrice triangulaire

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(6) *Un point de vue purement matriciel.* Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathbb{C}^n = M_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que $A = XY^T$.

(b) En déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$.

(c) En déduire que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 10. [Inspiré de Agro-Veto 2021 : puissances de matrices et une application probabiliste]
Les trois parties de ce problème sont essentiellement indépendantes. Seules les questions (5) et (6) de la partie III utilisent les résultats des parties I et II.

Partie I. Etude d'une matrice de taille 3 et de ses puissances.

Dans toute cette partie, on note

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \frac{1}{2}A - I_3.$$

(1) Montrer que B est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses caractéristiques géométriques.

(2) Vérifier que $(A - 2I_3)(A - 4I_3) = 0$: on dit que le polynôme $(X-2)(X-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice A.

(3) Pour $n \geq 1$, déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $(X-4)(X-2)$.

(4) En déduire, pour $n \geq 1$, l'expression de A^n comme combinaison linéaire de A et de I_3.

(5) En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}A\right)^n = B.$$

Partie II. Etude d'une matrice de taille 4 et de ses puissances.

Dans toute cette partie, on note

$$M = \begin{pmatrix} 27 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}.$$

(1) Diagonaliser la matrice M.

(2) En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{27}M\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie III. Une application probabiliste : le modèle d'évolution de Wright-Fisher.

On dispose d'un stock infini de boules vertes et de boules blanches. Dans toute cette expérience, N est un entier fixé ≥ 2.
On dispose d'une urne initiale U_0 contenant N boules, dont $a \geq 1$ sont vertes et $b \geq 1$ sont blanches, avec $a + b = N$. Puis

- on effectue N tirages avec remise d'une boule dans U_0. On note X_1 le nombre de boules vertes obtenues lors de ces N tirages.
- on remplit une urne U_1 avec X_1 boules vertes et $N - X_1$ boules blanches prises dans le stock de boules.
- on recommence avec U_1 : on effectue N tirages avec remise d'une boule dans U_1. On note X_2 le nombre de boules vertes obtenues lors de ces N tirages puis on remplit une urne U_2 avec X_2 boules vertes et $N - X_2$ boules blanches.
- on recommence indéfiniment : on construit ainsi une suite d'urnes $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ contenant toutes N boules et on note X_n le nombres de boules vertes mises dans U_n. Cette variable aléatoire X_n désigne donc aussi le nombres de boules vertes obtenues lors des N tirages avec remise dans l'urne U_{n-1}.

(1) Déterminer la loi de X_1. Rappeler son espérance et sa variance.

(2) Pour $n \geq 1$, déterminer $\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = k)$ en distinguant les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.

(3) Pour $n \geq 1$, déterminer $\mathbb{P}_{(X_n=N)}(X_{n+1} = k)$ en distinguant les cas $k = N$ et $k \leq N - 1$.

(4) (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $i, j \in [\![0, N]\!]$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j} \mathbb{P}(X_n = i).$$

(b) Rappeler l'interprétation probabiliste de la somme

$$S_i = \sum_{j=0}^{N} j \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j}$$

et rappeler sa valeur.

(c) En déduire soigneusement que

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_1).$$

(5) *Le cas* $N = 2$. Dans cette question, on suppose que $N = 2$ et que $a = b = 1$. Pour $n \geq 1$, on note $V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$. On a donc en particulier $V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer, en utilisant (4), que pour tout $n \geq 0$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{4} A V_n$ où A est la matrice introduite à la partie I.

(b) En déduire la valeur de V_n en fonction de A, V_0 et n.

(c) A l'aide de I(5), en déduire la limite de V_n lorsque n tend vers $+\infty$. Commenter le résultat obtenu.

(6) *Le cas* $N = 3$. Dans cette question, on suppose que $N = 3$, que $a = 1$ et que $b = 2$.

Pour $n \geq 1$, on note $V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$ et on admet que pour tout $n \geq 0$, $V_{n+1} = \dfrac{1}{27} M V_n$ où M est la matrice introduite à la partie II.

A l'aide de II(5), déterminer la limite de V_n lorsque n tend vers $+\infty$. Commenter à nouveau le résultat obtenu.

(7) *Le cas général.* On suppose à nouveau que N est un entier quelconque ≥ 2. On note, pour $n \geq 1$,
$$u_n = \mathbb{P}\big(X_n \in \{0, N\}\big) = \mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}(X_n = N).$$

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$:
$$\mathbb{P}_{(X_n=k)}\big(X_{n+1} \in \{0, N\}\big) \geq \frac{2}{N^N}.$$

(b) En déduire que
$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} \geq \left(1 - \frac{2}{N^N}\right) u_n + \frac{2}{N^N}.$$

Soit (w_n) la suite définie par $w_1 = u_1$ et pour tout $n \geq 1$,
$$w_{n+1} = \left(1 - \frac{2}{N^N}\right) w_n + \frac{2}{N^N}.$$

(c) Montrer que la suite (w_n) converge et déterminer sa limite.

(d) Montrer que : $\forall n \geq 1$, $u_n \geq w_n$.

(e) En déduire la limite de (u_n). Commenter le résultat obtenu.

(f) En utilisant (4c), en déduire que les suites $\big(\mathbb{P}(X_n = 0)\big)_{n\geq 1}$ et $\big(\mathbb{P}(X_n = N)\big)_{n\geq 1}$ convergent et déterminer leur limite respective.

Commentaire : le modèle d'évolution de Wright-Fisher est utilisé pour modéliser la génétique des populations.

Exercice 11. [Extrait de CCP 2016, filière PSI : matrices strictement stochastiques]
Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq p} \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice carrée de taille $p \geq 2$ à coefficients réels. On dit que A est une matrice strictement stochastique si pour tout i et j compris entre 1 et p, on a $a_{ij} > 0$ et si
$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij} = 1.$$

La dernière condition signifie que la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1.

(1) Montrer que si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ est strictement stochastique, alors $a_{ij} < 1$ pour tout i et j compris entre 1 et p.

(2) Montrer que le produit de deux matrices strictement stochastiques est une matrice strictement stochastique. En déduire que si A est une matrice strictement stochastique, alors A^n est une matrice strictement stochastique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq p}$ une matrice strictement stochastique. On note $m = \min\limits_{1\leq i,j\leq p} a_{ij}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_{ij}^{(n)}$ le terme général de A^n : $A^n = \big(a_{ij}^{(n)}\big)_{1\leq i,j\leq p}$. Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et p, on note
$$m_j^{(n)} = \min_{1\leq i\leq p} a_{ij}^{(n)} \text{ et } M_j^{(n)} = \max_{1\leq i\leq p} a_{ij}^{(n)}.$$

(3) Montrer que $m \in]0, 1/2]$.

(4) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier j compris entre 1 et p :
$$0 < m_j^{(n)} \leq m_j^{(n+1)} \leq M_j^{(n+1)} \leq M_j^{(n)}.$$

Indication : $A^{n+1} = A \times A^n$.

(5) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier j compris entre 1 et p :
$$m_j^{(n+1)} - m_j^{(n)} \geq m\big(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\big) \text{ et } M_j^{(n)} - M_j^{(n+1)} \geq m\big(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\big).$$

(6) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier j compris entre 1 et p :

$$M_j^{(n+1)} - m_j^{(n+1)} \leq (1-2m)\big(M_j^{(n)} - m_j^{(n)}\big).$$

En déduire que

$$0 \leq M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \leq (1-2m)^{n-1}\big(M_j^{(1)} - m_j^{(1)}\big).$$

(7) En déduire que pour entier j compris entre 1 et p, les suites $\big(m_j^{(n)}\big)_{n\geq 1}$ et $\big(M_j^{(n)}\big)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

(8) En déduire que la suite de matrices $(A^n)_{n\geq 1}$ converge vers une matrice L dont toutes les lignes sont identiques.