Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2022-2023.
Mercredi 6 Juillet 2022.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Voici le déroulé prévisionnel de la séance du 6/07 dont le contenu est directement inspiré par le sujet X/ENS PC 2022. J'ai prévu de corriger la quasi-totalité des exercices en mode cours/TD. N'hésitez pas à les parcourir à l'avance en fonction de votre temps disponible. Une partie d'entre eux est contenue dans le sujet X/ENS, d'autres donnent un éclairage différent ou complémentaire sur certaines des notions abordées dans ce sujet.

1. Complétude, compacité et théorèmes de point fixe

1.1. **Complétude.**

Exercice 1. [Espaces métriques]

(1) Soit E un ensemble. Définir : d est une distance sur E.

(2) Soit E un espace vectoriel. Définir : N est une norme sur E.

Exercice 2. [Suites de Cauchy]
Soit (E, d) un espace métrique.

(1) Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Définir : la suite (x_n) est de Cauchy.

(2) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

(3) Montrer que toute suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence est convergente.

Exercice 3. [Espaces métriques complets]

(1) Soit (E, d) un espace métrique. Définir : (E, d) est complet.

(2) Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Définir : (E, N) est un espace de Banach.

(3) Soit F une partie d'un espace métrique complet (E, d). Montrer que

$$(F, d) \text{ est complet } \Leftrightarrow F \text{ est fermée.}$$

(4) Montrer que tout espace métrique compact est complet.

(5) Soit (E, N) un espace de Banach. Montrer que toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Exercice 4. [Exemples et contre-exemples]

(1) Montrer que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est complet :

(a) sans utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass,

(b) en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

(2) Montrer que $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

(3) Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

(4) Sur $E = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$, construire deux normes N_1 et N_2 de sorte que (E, N_1) soit complet et que (E, N_2) ne soit pas complet.

1.2. Le théorème du point fixe pour les applications contractantes.

Théorème. *Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \to E$ telle que*

$$\exists k \in [0, 1[\,,\ \forall x, y \in E,\ d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

Alors f possède un unique point fixe α.
De plus, pour tout $x_0 \in E$, la suite (x_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α.

Exercice 5. [Démonstration]
Démontrer le théorème précédent en suivant la démarche ci-dessous.

(1) Montrer que f possède au plus un point fixe.

(2) Montrer que pour tout $x_0 \in E$, la suite (x_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ est de Cauchy.

(3) Montrer que la suite précédente converge vers un point fixe de f.

(4) Conclure.

1.3. Deux variantes du théorème de point fixe.

Exercice 6. [Point fixe et compacité]

(1) Soient (E, d) un espace métrique compact et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E,\ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

En considérant la fonction $x \mapsto d(x, f(x))$, montrer que f possède un unique point fixe.

(2) Montrer que le résultat précédent est faux si E n'est plus supposé compact.

Exercice 7. [Point fixe et compacité-convexité]
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, C une partie convexe compacte de E et $f : C \to C$ telle que

$$\forall x, y \in C,\ \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|.$$

(1) Soit $a \in C$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $f_n : C \to C$ définie par

$$\forall x \in C,\ f_n(x) = \frac{1}{n} a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$$

est bien définie et possède un unique point fixe.

(2) En déduire que f possède un point fixe.

(3) Montrer que le résultat précédent est faux si C n'est plus supposé compact ou convexe.

2. Normes matricielles et rayon spectral

2.1. Normes matricielles.

Exercice 8. [Normes subordonnées]
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{K}^n$. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on note

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|\,;\,\|x\| \leq 1\} = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

(1) Montrer que $\|A\|$ est bien défini et que

$$A \mapsto \|A\|$$

définit une norme sur $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\|I_n\| = 1$ et

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

On dit que cette norme sur $M_n(\mathbb{K})$ est la norme matricielle subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^n$.

(2) Pour la norme $x \mapsto \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, montrer que

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

(3) Pour la norme $x \mapsto \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, montrer que

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Exercice 9. [Une norme classique non subordonnée]

(1) Montrer que $A \mapsto N(A) = \big(\mathrm{tr}(A^TA)\big)^{1/2}$ définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que cette norme n'est pas une norme subordonnée à une norme sur $\mathbb{R}^n$: il n'existe pas de norme sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ N(A) = \|A\| = \sup\{\|Ax\|\,;\,\|x\| \leq 1\}.$$

(3) Déterminer une constante α telle que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq \alpha N(A)N(B).$$

2.2. Rayon spectral d'une matrice.

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on note $\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)} |\lambda|$ où $\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres complexes de A.

Exercice 10. [Des propriétés faciles]

(1) Montrer que $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$ pour toute matrice A et tout scalaire α.

(2) Montrer que $\rho(A^T) = \rho(A)$ pour toute matrice A.

(3) Montrer que $\rho(A^k) = \rho(A)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$ si A est supposée de plus inversible.

(4) Montrer que : $\rho(A) = 0 \Leftrightarrow A$ est nilpotente.

(5) Montrer que pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{C}^n$, on a :
$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Exercice 11. [Une formule classique]

Soit $A \mapsto \|A\|_2$ la norme matricielle subordonnée à la norme $x \mapsto \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$.

(1) Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$.
Indication : on pourra remarquer que $A^T A$ est une matrice symétrique réelle positive.

(2) En déduire que si $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\|A\|_2 = \rho(A)$.

(3) Montrer de même que si $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^* A)}$ où $A^* = \overline{A}^T$.

Exercice 12. [Un résultat lui aussi classique]

On note $A \mapsto \|A\|_\infty$ la norme matricielle sur $M_n(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme
$$x \mapsto \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$
sur $\mathbb{C}^n$.

(1) Soit $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que
$$\|T\|_\infty \leq \rho(T) + (n-1) \max_{1 \leq i < j \leq n} |t_{ij}|.$$

(2) Soit $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure et pour $\delta > 0$, soit P_δ la matrice diagonale
$$P_\delta = \operatorname{diag}(1, \delta, \dots, \delta^{n-1}) \in D_n(\mathbb{C}).$$

(a) Calculer $P_\delta T P_\delta^{-1}$.

(b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\|P_\delta T P_\delta^{-1}\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon.$$

(3) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ deux matrices semblables : $A = PBP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
Montrer que $x \mapsto \|x\| = \|P^{-1}x\|_\infty$ définit une norme sur $\mathbb{C}^n$ et que la norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ vérifie
$$\|A\| = \|B\|_\infty.$$

(4) Déduire des questions précédentes le résultat suivant : pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$ et pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe une norme $x \mapsto \|x\|$ sur $\mathbb{C}^n$ (dépendant de A et de ε) telle que la norme matricielle subordonnée $\|\cdot\|$ vérifie
$$\|A\| \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Exercice 13. [Deux applications]

En utilisant le résultat de l'exercice précédent,

(1) montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$,
$$\lim_{k \to +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$$

(2) montrer que pour toute norme N sur $M_n(\mathbb{C})$ et pour tout $A \in M_n(\mathbb{C})$,
$$\lim_{k \to +\infty} \left(N(A^k)\right)^{1/k} = \rho(A).$$

3. Un soupçon de calcul différentiel. Fonctions définies par des intégrales

3.1. Révisions de cours.

Exercice 14. [Différentiabilité]
Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f\ : U \to \mathbb{R}^p$ une fonction.

(1) Soit $a \in U$. Définir : f est différentiable au point a.
(2) Définir : f est de classe $\mathcal{C}^1$.
(3) Enoncer la caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^1$ à l'aide des dérivées partielles.

Exercice 15. [Difféomorphismes]

(1) Définir la notion de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.
(2) Enoncer le théorème d'inversion locale.

Exercice 16. [Fonctions définies par des intégrales]

(1) Enoncer le théorème de continuité des intégrales à paramètres $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.
(2) Enoncer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

3.2. Deux exercices.

Exercice 17. [Un classique]
Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

Soit $h\ : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta,\ h(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

(1) Montrer que pour tout $(x,y) \in\in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$,
$$h(x,y) = \int_0^1 f'\big(ux + (1-u)y\big)\,\mathrm{d}u.$$
(2) En déduire que h se prolonge en une unique fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
(3) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. [Théorèmes de division]

(1) Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $g\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x) = xg(x)$.
(2) Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0,y) = 0$ pour tout y. Montrer qu'il existe $g\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x,y) = xg(x,y)$.
(3) Soit $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $h\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que
$$h(x,y) = 0 \Rightarrow (\operatorname{grad} h(x,y) \neq 0 \ \text{ et } \ f(x,y) = 0).$$
Montrer qu'il existe $g\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(x,y) = g(x,y)h(x,y)$.