Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2022-2023.
Mercredi 6 Juillet 2022.
Autour de l'épreuve X/ENS/ESPCI Filière PC 2022.

Laurent BONAVERO

Table des matières

---

1. Présentation de la séance

La séance sera articulée autour de l'épreuve de Mathématiques X/ENS/ESPCI Filière PC, 2022. Cette épreuve se compose de 4 parties essentiellement indépendantes, seule la dernière partie utilisant des résultats démontrés dans la troisième. Ce sujet est bien écrit, de difficulté progressive, de longueur raisonnable, ne contient pas d'erreur et aborde une belle variété de techniques mathématiques.

1.1. Description du sujet.

La **Partie 1** est très classique et doit faire partie du bagage de tout candidat à l'Agrégation Interne : il s'agît de variations autour du théorème de point fixe.
Les prérequis indispensables pour traiter cette partie sont : le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des accroissements finis pour les fonctions d'une variable réelle, la convergence des séries absolument convergentes en dimension finie, un soupçon de topologie dans $\mathbb{R}^n$ (notion de partie fermée de $\mathbb{R}^n$).

La **Partie II** consiste à étudier le comportement des puissances d'une matrice A (de taille 2 pour l'essentiel) en fonction de son rayon spectral $\rho(A)$. On y démontre en particulier, pour tout $\eta > 0$, l'existence d'une norme N sur $\mathbb{C}^2$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{C}^2,\, N(Ax) \leq \big(\rho(A) + \eta\big)N(x).$$

On y démontre aussi que ce résultat est optimal au sens où l'on ne peut pas remplacer η par 0. Ce résultat est utilisé dans la dernière question pour démontrer un résultat de convergence de suites récurrentes.
Cette partie est elle aussi très accessible.
Les prérequis pour traiter cette partie sont à nouveau une bonne maitrise des séries absolument convergentes, ainsi que les résultats de base de la réduction matricielle (trigonalisation, diagonalisation).

La **Partie III** est un peu plus délicate : on y traite de fonctions de deux variables, de leur régularité et de fonctions de deux variables définies par des intégrales. Elle nécessite une bonne maîtrise des théorèmes de continuité et de dérivabilité des intégrales à paramètres, ainsi qu'une certaine habileté à majorer des intégrales. Les deux premières questions sont cependant très abordables et devraient pouvoir être traitées sans trop de difficultés.

La **Partie IV** traite de la méthode de la sécante (variante de la méthode de la tangente) afin de trouver des valeurs approchées aux solutions d'équations du type $f(x) = 0$. Les deux premières questions peuvent être traitées indépendamment des parties précédentes, la dernière question demande un peu de sang froid et utilise le résultat principal démontré dans la Partie III.

1.2. **Ce que je vous demande.**
Je vous demande de chercher ce sujet, qui vous sera distribué au plus tard le 22/06.

Pour les **primo-inscrits** : consacrer l'essentiel de votre énergie à traiter les deux premières parties tout en revoyant les parties de cours nécessaires pour les traiter. Si possible, lire les deux autres parties et traiter les deux premières questions de chacune d'elles.
Pour les **chevronnés** : passer 3h en mode concours sur ce sujet. Puis revenir sur les questions non traitées, en vous aidant éventuellement des indications que je fournis dans la section suivante.

1.3. **Ce que je ferai le 6/07.**
Je passerai la séance à discuter de ce sujet, à revenir sur les points fondamentaux du programme de l'Agreg nécessaires pour le traiter. Je vous proposerai aussi quelques compléments en lien avec ce sujet. Je vous distribuerai un corrigé détaillé dont la lecture ne sera utile qu'à ceux qui auront cherché ce sujet.

1.4. **Me contacter.**
Si vous avez des questions, ne pas hésiter à me contacter par mail :

laurent.bonavero@ac-grenoble.fr

2. Des indications pour avancer dans le sujet

Avertissement. Je vous propose quelques indications, à destination de ceux qui auraient des difficultés à avancer. Il est évident qu'il est infiniment plus formateur de chercher le sujet sans ces indications, quitte à s'y prendre en plusieurs fois : ne les utiliser qu'en cas de blocage persistant ! !
Certaines questions sont délicates, on ne devient pas agrégé sans un minimum de souffrance.
Questions pouvant poser des difficultés : I(6), II(1), III(1b), IV(2b,c,d).
Question difficile : II(5).

Partie I. Points fixes.

1. Introduire la fonction $h\ : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in [a,b],\ h(x) = \phi(x) - x.$$

2. Ecrire l'inégalité des accroissements finis pour ϕ entre 0 et x afin d'obtenir un encadrement de $x - \phi(x)$.

3. RAS.

4. (a) Télescopage.
(b) Idem.

5. (a) Majorer $\|x_{n+1} - x_n\| = \|\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})\|$.
Ne pas oublier de vérifier que la limite de (x_n) appartient bien à F.
(b) RAS.
(c) RAS.
(d) Montrer que $\theta(x^*)$ est un point fixe de ϕ.

6. Poser $\alpha = \sup(E)$. Puis montrer en raisonnant par l'absurde à chaque fois que $\alpha \geq g(\alpha)$ et que $\alpha \leq g(\alpha)$.

Partie II. Matrices contractantes.

1. Deux approches possibles.
Première approche : distinguer les cas $\lambda = \mu$ et $\lambda \neq \mu$. Dans ce dernier cas, diagonaliser T.
Deuxième approche : calculer les premières puissances, deviner la formule et la démontrer par récurrence.
Cette question pouvant être bloquante, voici le résultat :
$$T^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & a \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mu^{n-1-k} \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) Trigonaliser A et utiliser la question précédente.
Remarquer que pour tout $\varepsilon > 0$, la suite $\left(\dfrac{n\rho(A)^n}{(\rho(A)+\varepsilon)^n}\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0.
(b) RAS.

3. (a) Choisir $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < \eta$ et utiliser la question précédente.
(b) RAS.
(c) RAS.

4. (a) Ecrire $B = PDP^{-1}$ où D est diagonale et poser $\|x\|_B = \|P^{-1}x\|$.

(b) Penser aux matrices nilpotentes.

5. Question très délicate qui demande d'utiliser tout ce qui précède avec sang-froid.

Partie III. Fonctions de deux variables réelles

1. (a) RAS.

(b) Commencer par démontrer le résultat suivant, appelé formule de la moyenne.
Soit $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f = (b-a)f(c).$$

2. RAS. Revoir un cours sur le théorème de la bijection si nécessaire.

3. (a) Ecrire

$$H_f(x,y) - x = -f(x)\frac{y-x}{f(y)-f(x)} = -f(x)\frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

où $a = f(x)$ et $b = f(y)$.

(b) Utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

(c) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^1$ en montrant que u possède des dérivées partielles (à l'aide du théorème de dérivation des intégrales à paramètres) continues (comme dans la question précédente) puis en recommençant avec les dérivées partielles de u.

(d) RAS.

4. (a) Appliquer III(1b).

(b) Dériver sous le signe intégrale.

Partie IV. Méthode de la sécante.

1. RAS.

2. (a) RAS.

(b) Montrer successivement :

$$x_{n+1} = \frac{x_n x_{n-1} - \alpha\beta}{x_n + x_{n+1} - (\alpha+\beta)},$$
$$x_{n+1} - \alpha = \frac{(x_n-\alpha)(x_{n-1}-\alpha)}{x_n + x_{n+1} - (\alpha+\beta)}$$

puis

$$u_{n+1} = u_n u_{n-1}.$$

(c) RAS.

(d) Considérer la suite (v_n) de terme général $v_n = \ln|u_n|$.

3. (a) RAS.

(b) Utiliser la Partie III.

(c) RAS.