Université Grenoble Alpes
Année 2022/2023
Agrégation interne
Fonction de la variable réelle, suites et séries numériques

Exercice 1. *Étudier la continuité de la fonction* $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 2. *Montrer que les seules applications continues de* $\mathbb{R}$ *vers* $\mathbb{Z}$ *sont les applications constantes.*

Exercice 3. *Soient* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *bornée et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue. Montrer que* $g \circ f$ *et* $f \circ g$ *sont bornées.*

Exercice 4. *Soient* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continues telles que*

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha.$$

Exercice 5. *On cherche les fonctions* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continues telles que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

1. *On suppose* f *solution et* $f(0) = f(1) = 0$.
   Montrer que f *est périodique et que*

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ 2f(x) = f(2x).$$

   En déduire que f *est nulle.*
2. *Déterminer toutes les fonctions* f *solutions.*

Exercice 6. *Déterminer toutes les applications* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dérivables telles que*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 7. *On pose* $f : x \mapsto ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$.

1. *Montrer que* f *est une fonction polynomiale de degré* n.
2. *Calculer* $f(1)$ *et* $f(-1)$.
3. *Montrer que* f *possède exactement* n *racines distinctes dans* $]-1, 1[$.

Exercice 8. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que*

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 9. *Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ positive et décroissante sur $I = [a,b]$.*
Soit g une fonction continue sur I. On définit $G : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

1. *Montrer qu'il existe m, $M \in \mathbb{R}$ tel que*

$$G([a,b]) = [m,M].$$

2. *Montrer que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,dt.$$

3. *En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(a)\int_a^c g(t)\,dt.$$

Exercice 10. *(Théorème de Bolzano-Weierstrass)*

1. *Montrer que de toute suite de réels, on peut extraire une suite monotone. (On pourra utiliser*

$$H = \{n \in \mathbb{N}, \exists m > n, u_m \geq u_n\}.)$$

2. *En déduire le théorème de Bolzano-Weiestrass : de toute suite bornée de réels, on peut extraire une suite convergente.*
3. *En utilisant le procédé de dichotomie, démontrer le théorème de Bolzano-Weiestrass à partir de la propriété des segments emboités.*

Exercice 11. *(Suites de Cauchy)*

1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
Montrer que (u_n) est de Cauchy si et seulement si (u_n) est convergente.
2. *Montrer que la série harmonique (h_n) définie par $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ n'est pas de Cauchy.*

Exercice 12. 1. *Montrer que les suites réelles $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes.*

2. *On considère les deux suites :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots + \frac{1}{n!};\ n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!};\ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite. Montrer que cette limite est irrationnelle.

Exercice 13. *Soit $n \geq 2$. On considère l'équation $x^n = 1 + x$ sur $[1, +\infty[$.*

1. *Montrer que l'équation admet une unique solution x_n.*
2. *Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geq 2}$.*
3. *Formons un développement asymptotique à deux termes de la suite $(x_n)_{n\geq 2}$.*

Exercice 14. 1. *Nature de la suite $(E(a^n)^{1/n})$ pour $a > 0$.*

2. (a) *Établir que $\forall x \geq 0, x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1 + x) \leq x$.*

   (b) *En déduire la limite de*

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 15. *On considère la suite réelle définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$.*

1. *Montrer que x_n est supérieur ou égal à 1 pour tout n.*
2. *Montrer que si (x_n) converge, sa limite l vérifie $l = \sqrt{2l + 1}$.*
3. *l étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver $k \in]0, 1[$ tel que $|x_n - l| \leq k|x_{n-1} - l|$? Si oui, en déduire que $|x_n - l|| \leq k^n|x_0 - l|$. Conclure.*

Exercice 16. *Considérons la suite (u_n) définie par :*

$$u_0 > 0,\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

1. *Montrer que (u_n) converge vers 0.*
2. *En utilisant le théorème de Cesaro, donner un équivalent de (u_n).*

Exercice 17. *Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme*

1. $\sum_{n\geq 2} \ln(1 - \frac{1}{n^2})$
2. $\sum_{n\geq 0} \ln\cos(\frac{x}{2^n})$ *pour* $x \in] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$
4. $\sum_{n\geq 3} \frac{2n-1}{n(n^2-4)}$

Exercice 18. *Déterminer la nature des séries de terme général u_n.*

$$a)u_n = n^{1/n^2} - 1;\ u_n = \frac{\ln n}{n^2};\ u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}};\ u_n = n^a(1 - \cos\frac{1}{n});$$

$$u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n!)};\ u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}dx.$$

Exercice 19. *Déterminer si la série de terme général u_n est absolument convergente, semi-convergente, ou divergente :*

$$a)u_n = \frac{a^n \ln(n)}{\sqrt{n}+2};\ b)u_n = \frac{1+(-1)^n n}{n^2};\ u_n = \frac{\cos^2 n}{n};$$

$$u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right);\ u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}\ (\textit{ on pourra étudier } v_n = u_{2n} + u_{2n+1})$$

Exercice 20.
1. *On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 2$.*
2. *On définit pour $n \geq 1$, v_n par : $v_{3p+1} = \frac{1}{2p+1}$, $v_{3p+2} = \frac{-1}{4p+2}$ $v_{3p} = \frac{-1}{4p}$ (les termes sont ceux de la série précédente écrits dans un autre ordre). Montrer que $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente et que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 21. *On pose pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ et pour $n \geq 2$, $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$.*

1. *Montrer que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$*
2. *Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.*
3. *Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.*
4. *En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.*

Exercice 22. *On pose*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}.$$

1. *Donner un équivalent simple de S_n.*
2. *Montrer que $S_n = \ln n + C + o(1)$.*

Exercice 23.
1. *On considère la série de terme général*

$$u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}.$$

Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que

$$n! \sim k\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

2. *Démontrer la formule de Wallis*

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right)^2 = \pi.$$

On posera $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, *on obtiendra une relation de récurrence entre* I_n *et* I_{n-2} *puis l'expression de* I_{2p} *et* I_{2p+1}.