Université Grenoble Alpes
Année 2022/2023
Agrégation interne
Intégration

Exercice 1. *Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Montrer que*

$$\int_a^b f(t)dt = 0 \iff f = 0.$$

Exercice 2. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant*

$$\int_0^1 f(t)dt = 0.$$

Montrer qu'il existe $x \in]0,1[$ vérifiant

$$\int_0^x tf(t)dt = 0.$$

Exercice 3. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Exercice 4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la fonction*

$$g : x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)dt$$

est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 5. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.*

1. *Montrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier*
2. *Montrer que f est Riemann intégrable.*

Exercice 6. *(Riemann-Lebesgue) Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

Exercice 7. *Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$.*

1. *Montrer que f est limite uniforme d'une suite de fonctions continues affines par morceaux*

2. *Montrer que toute fonction affine par morceaux sur un segment* $[a, b]$ *admet des primitives*
3. *Montrer que* f *admet des primitives.*

Exercice 8. *Soit* φ *une fonction définie sur* $]0,1[$ *par*

$$\varphi(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. *Montrer que* φ *est bien définie et que cette fonction se prolonge par continuité en* 0 *et en* 1.
2. *En déduire la valeur de*
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx.$$

Exercice 9. *Montrer que*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2.$$

Exercice 10. *En faisant apparaitre une somme de Riemann donner un équivalent simple de*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Exercice 11. *Déterminer, à l'aide de changements de variables, les primitives*

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt[3]{2+x}} dx.$$

Exercice 12. Déterminer une primitive sur $]-\infty, -1[$ ou sur $]-1, +\infty[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^3}$.

Exercice 13. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{(2-\sin x)}$

(on pourra utiliser le changement de variable $t = \tan(x/2)$).

Exercice 14. Déterminer une primitive sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$ (on posera $u = \sqrt{e^x - 1}$).

Exercice 15. Déterminer une primitive sur $\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Exercice 16. *Soit* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$,

1. *Montrer que* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ *et* $I_n > 0$.
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$
3. *En déduire l'expression de* I_{2p} *et* I_{2p+1} *pour* $p \in \mathbb{N}$.
4. *Montrer que* (I_n) *décroit, que* nI_nI_{n-1} *est constant et que* $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Exercice 17. *Soit* $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. *Montrer que* (I_n) *converge vers* 0.
2. *Montrer que*
$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$
3. *En déduire que*
$$e = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Exercice 18. Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$J_{11} = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^\alpha (1-x^2)^\beta} dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad J_{12} = \int_0^\infty \frac{sinx}{x} dx$$
$$J_{13} = \int_0^\infty \frac{|sinx|}{x} dx \quad J_{14} = \int_1^{+\infty} \frac{(\cos(1/x))^x - 1}{x^\alpha}$$

Exercice 19. *Déterminer la limite de la suite de terme général*

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx.$$

Exercice 20. *Etudier la limite éventuelle de la suite de terme général*

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{n+2}+1} dx.$$

Exercice 21. *Etablir que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \longrightarrow_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Exercice 22. *Prouver que*

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 23. *On note pour n et $m \in \mathbb{N}$*

$$I_n(m) = \int_0^1 x^n (\ln x)^m dx.$$

1. *Calculer $I_n(m)$. En déduire $I_n(n)$.*
2. *En déduire*

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}.$$

Exercice 24. *Montrer*

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Exercice 25. *On considère*

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$$

1. *Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.*
2. *Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et est solution de*

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

Exercice 26. *On considère*

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{(-1+ix)t^2} dt.$$

1. *Montrer que f est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie*

$$f'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} f(x).$$

2. *En déduire l'expression de $f(x)$ sachant que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.*