Notations et présentation du problème

- ▷ On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.
- ▷ On note $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs et $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.
- ▷ Soient E et F deux ensembles quelconques. On note $E \setminus F$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à E mais pas à F.
- ▷ Lorsque le corps $\mathbf{K}$ est égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on identifie polynômes et fonctions polynômiales associées. On note $\mathbf{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$ et, pour n entier, $\mathbf{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- ▷ Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble de ses endomorphismes.
- ▷ On note indifféremment, lorsque la notion est bien définie, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(x)$ ou $f^{(n)}(x)$ la dérivée n-ième d'une fonction f en un point x. Par convention, pour $n = 0$, $f^{(0)}(x) = f(x)$.
- ▷ On note $C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (respectivement $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$) l'ensemble des fonctions continues (respectivement infiniment dérivables) sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$.

Dans la première partie, on introduit la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$. On établit son orthogonalité pour un certain produit scalaire, ainsi que d'autres propriétés. Après avoir étudié, en partie II, quelques propriétés de la fonction Γ utiles par la suite, on définit et étudie dans la partie III la dérivation d'une fonction à un ordre $s \in \mathbf{R}$, ceci pour une classe appropriée de fonctions. Ce travail permettra de définir une famille de fonctions $(H_s)_{s\in\mathbf{R}}$ qui étend naturellement la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$. L'étude des propriétés de cette famille, en lien avec l'équation différentielle d'Hermite, fera l'objet de la partie IV.

Partie I : Polynômes orthogonaux d'Hermite

1. (a) Soit un couple $(P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2$.
Montrer que la fonction de la variable réelle x définie par : $x \mapsto P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

(b) On note $< \, , \, >$ l'application définie sur $\mathbf{R}[X]^2$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \ < P, Q > \ = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Établir que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

Dans la suite du problème, on munit $\mathbf{R}[X]$ de cette structure d'espace préhilbertien réel.

2. Montrer qu'il existe une suite $(Q_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments unitaires de $\mathbf{R}[X]$ deux à deux orthogonaux telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le sous-espace engendré par $Q_0, \ldots, Q_n$ soit $\mathbf{R}_n[X]$.

 Tournez la page S.V.P.

3. Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note H_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$x \mapsto \quad H_n(x) = \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\mathrm{e}^{-x^2}\right).$$

   (a) Établir, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la relation : $\forall x \in \mathbf{R},\ H_{n+1}(x) = -2xH_n(x) + H_n'(x)$.

   (b) Calculer $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ et $H_3(x)$.

   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est un polynôme de degré n.
   H_n désigne le n-ième polynôme d'Hermite.

   (d) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le coefficient dominant du polynôme H_n.

4. Établir que $(H_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une famille orthogonale de $(\mathbf{R}[X], <\ ,\ >)$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le polynôme H_n est colinéaire au polynôme Q_n introduit à la question 2 (pour la structure d'espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$).

6. Établir, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'existence d'un nombre réel α_n tel que $H_n'(x) = \alpha_n H_{n-1}(x)$ pour tout réel x. On précisera la valeur de α_n.

7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, H_n est solution de l'équation différentielle (dite d'Hermite) :

$$(E_n) \qquad y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

8. Établir, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la relation de récurrence :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ H_{n+1}(x) + 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0.$$

9. Que dire de la parité de H_n ?

10. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, H_n possède n racines réelles distinctes.

   Indication : on pourra remarquer que $< H_n, P > =\ 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbf{R}_{n-1}[X]$.

Partie II : Quelques résultats sur la fonction Γ

On considère la fonction Γ définie sur $]0\,,+\infty[$ par :

$$x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

On rappelle les résultats suivants (que l'on admet) :

▷ la fonction Γ est définie et de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$;

▷ $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in]0\,,+\infty[,\ \Gamma^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^n\, t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$

11. Vérifier que Γ satisfait à l'équation fonctionnelle :

$$(E_f) \qquad \forall x \in]0\,,+\infty[,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

12. Déterminer un équivalent simple de $\Gamma(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

13. Déterminer les limites de $\Gamma'(x)$ quand x tend vers 0^+ et quand x tend vers $+\infty$.

14. On étudie un prolongement de Γ sur l'ensemble des réels négatifs non entiers qui soit compatible avec l'équation fonctionnelle (E_f) de Γ.

(a) On note D_Γ l'ensemble $\mathbf{R}$ privé des entiers négatifs ou nuls, c'est-à-dire :

$$D_\Gamma = \mathbf{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Montrer qu'il existe un unique prolongement de Γ sur D_Γ qui préserve (E_f) sur D_Γ.

<u>Dans toute la suite du problème, on note encore Γ le prolongement ainsi obtenu.</u>

(b) Soit $n \in \mathbf{N}$. Déterminer un équivalent simple de $\Gamma(x)$ au voisinage de $(-n)^+$, c'est-à-dire quand x tend vers $(-n)$ par valeurs strictement supérieures à $(-n)$, et au voisinage de $(-n)^-$, c'est-à-dire quand x tend vers $(-n)$ par valeurs strictement inférieures à $(-n)$.

(c) Montrer que Γ est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$ et qu'elle présente un minimum strict en un point $x_0 \in [1\,,2]$. Établir le tableau de variations de Γ sur $]0\,,3]$.

(d) Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction Γ sur $]-3\,,3[$. Il est inutile de reproduire sur la copie un éventuel tableau de variations. On placera les asymptotes sur le dessin lorsqu'elles existent.

15. Soit $(x, y) \in\ ]0\,,+\infty[^2$. On pose, lorsque l'intégrale converge :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Démontrer que la fonction B est définie sur $]0\,,+\infty[^2$.

(b) Établir l'égalité :

$$\forall (x,y) \in\ ]0\,,+\infty[^2,\ \ B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

(c) Montrer que :

$$\forall x \in\ ]0\,,+\infty[,\ \ B(x,x) = 2^{1-2x} B\left(x, \frac{1}{2}\right).$$

(d) Calculer la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. En déduire la formule de duplication de la fonction Γ :

$$\forall x \in\ ]0\,,+\infty[,\ \ \Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

On admettra que, par une utilisation directe de l'équation fonctionnelle, la formule de duplication de Γ s'étend à tout $x \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{-n}{2},\ n \in \mathbf{N}\right\}$.

Tournez la page S.V.P.

Partie III : Une généralisation de la notion de dérivation

On définit deux espaces de fonctions en posant :

▷ $\mathbf{S}_0 = \left\{ f \in C^0(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \ / \ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } f(x) = o\left(\mathrm{e}^{\alpha x}\right) \text{ quand } x \text{ tend vers } -\infty \right\}$;

▷ $\mathbf{S}_\infty = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \ / \ \forall n \in \mathbf{N},\ f^{(n)} \in \mathbf{S}_0 \right\}$.

Pour $f \in \mathbf{S}_0$, $s \in]-\infty, 0[$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$D^{(s)}\big(f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{-\infty}^{x} (x-u)^{-s-1} f(u) \mathrm{d}u.$$

16. Pour $f \in \mathbf{S}_0$, $s \in]-\infty, 0[$ et $x \in \mathbf{R}$, montrer que le nombre $D^{(s)}\big(f\big)(x)$ défini ci-dessus existe bien et que l'on a :

$$D^{(s)}\big(f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{0}^{+\infty} u^{-s-1} f(x-u) \mathrm{d}u.$$

17. Pour $f \in \mathbf{S}_0$ et $s < 0$, montrer que $D^{(s)}\big(f\big) \in \mathbf{S}_0$.

La linéarité étant immédiate, l'application $D^{(s)} : f \mapsto D^{(s)}\big(f\big)$ est donc un endomorphisme de $\mathbf{S}_0$, ce que l'on admettra.

18. Pour $p \in \mathbf{N}^*$ et $f \in \mathbf{S}_0$, établir que $D^{(-p)}\big(f\big)$ coïncide avec la primitive itérée p fois de f, lorsque les constantes d'intégration sont toutes choisies nulles en $-\infty$, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ D^{(-p)}\big(f\big)(x) = \int_{u_1=-\infty}^{x} \left(\int_{u_2=-\infty}^{u_1} \left(\dots \left(\int_{u_p=-\infty}^{u_{p-1}} f(u_p) \mathrm{d}u_p \right) \dots \right) \mathrm{d}u_2 \right) \mathrm{d}u_1.$$

19. Établir l'égalité entre éléments de $\mathcal{L}(\mathbf{S}_0)$:

$$\forall (s, s') \in]-\infty, 0[^2,\ D^{(s)} \circ D^{(s')} = D^{(s+s')}.$$

On souhaite étendre la dérivation d'ordre n (entier naturel) à des ordres réels. Pour cela, on va travailler sur $\mathbf{S}_\infty$.

20. Montrer que, pour tout réel s strictement négatif, $D^{(s)}$ laisse stable le sous-espace vectoriel $\mathbf{S}_\infty$.

Par la suite, on note encore $D^{(s)}$ les endomorphismes induits par la restriction de $D^{(s)}$ à $\mathbf{S}_\infty$.

21. On cherche à vérifier quelques égalités entre endomorphismes de $\mathbf{S}_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $d^{(n)}$ l'endomorphisme de dérivation n-ième sur $\mathbf{S}_\infty$:

$$\forall f \in \mathbf{S}_\infty,\ d^{(n)}\big(f\big) = f^{(n)}.$$

(a) Établir l'égalité suivante :

$$\forall s \in]-\infty, 0[,\ \forall n \in \mathbf{N},\ d^{(n)} \circ D^{(s)} = D^{(s)} \circ d^{(n)}.$$

(b) Pour $s \in]-\infty, 0[$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que $s + n < 0$, établir l'égalité :

$$D^{(s)} \circ d^{(n)} = d^{(n)} \circ D^{(s)} = D^{(s+n)}.$$

(c) Pour $s \in \mathbf{R}$ et $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ tels que $s < n$ et $s < m$, établir l'égalité :

$$d^{(n)} \circ D^{(s-n)} = d^{(m)} \circ D^{(s-m)}.$$

Pour $f \in \mathbf{S}_0$ et lorsque $s \geqslant 0$, la fonction $u \mapsto u^{-s-1} f(x-u)$ peut ne pas être intégrable sur $]0, +\infty[$. Aussi, lorsque $s \geqslant 0$, l'opérateur $D^{(s)}$ ne peut pas être défini à l'aide de la formule intégrale :

$$\forall f \in S_\infty, \ D^{(s)}\big(f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_{-\infty}^{x} (x-u)^{-s-1} f(u) \mathrm{d}u = \frac{1}{\Gamma(-s)} \int_0^{+\infty} u^{-s-1} f(x-u) \mathrm{d}u.$$

En s'appuyant sur les questions précédentes, on définit, pour $s \in \mathbf{R}$, un opérateur $D^{(s)}$ sur $\mathbf{S}_\infty$ de la façon suivante :

$$D^{(s)} = D^{(s-n)} \circ d^{(n)} \quad \text{où } n \in \mathbf{N} \text{ est tel que } s < n.$$

On a montré à la question précédente que cette définition est indépendante de l'entier naturel n choisi tel que $s < n$. De manière explicite :

$$\forall f \in \mathbf{S}_\infty, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ D^{(s)}\big(f\big)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-s)} \int_0^{+\infty} u^{n-s-1} f^{(n)}(x-u) \mathrm{d}u.$$

22. Montrer que dans $\mathcal{L}(\mathbf{S}_\infty)$, on a, pour tout $(s, s') \in \mathbf{R}^2$, l'égalité : $D^{(s+s')} = D^{(s)} \circ D^{(s')}$.

23. Soit $f \in \mathbf{S}_\infty$ et $x \in \mathbf{R}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $D^{(n)}\big(f\big)(x) = f^{(n)}(x)$.

24. Soit $f \in \mathbf{S}_\infty$. Établir que la fonction : $(x, s) \mapsto D^{(s)}\big(f\big)(x)$ est continue sur $\mathbf{R}^2$.

Partie IV : Étude des polynômes d'Hermite généralisés.

On montre dans cette partie que la définition des opérateurs de dérivation $(D^{(s)})_{s \in \mathbf{R}}$ permet d'étendre la famille des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n \in \mathbf{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ H_n(x) = \mathrm{e}^{x^2} D^{(n)}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

en une famille des polynômes d'Hermite généralisés $(H_s)_{s \in \mathbf{R}}$:

$$\forall s \in \mathbf{R}, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ H_s(x) = \mathrm{e}^{x^2} D^{(s)}(\mathrm{e}^{-x^2}).$$

25. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ appartient à l'espace $\mathbf{S}_\infty$, ce qui justifie la définition de la famille des polynômes d'Hermite généralisée, $(H_s)_{s \in \mathbf{R}}$.

26. Démontrer que, pour tout réel s et pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ tel que $s < m$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \ H_s(x) = \frac{1}{\Gamma(m-s)} \int_0^{+\infty} H_m(x-u) \mathrm{e}^{-u^2+2xu} u^{m-s-1} \mathrm{d}u.$$

Tournez la page S.V.P.

27. Établir que, pour tout $s \in \mathbf{R}$:

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \ H_s'(x) = -2sH_{s-1}(x).$$

28. Établir que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, H_s est solution de l'équation différentielle :

$$(E_s) \qquad y'' - 2xy' + 2sy = 0$$

qui généralise, pour le paramètre s réel, l'équation d'Hermite (E_n) lorsque n est un entier positif ou nul.

29. Vérifier que, pour tout $s \in \mathbf{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \ H_{s+1}(x) + 2xH_s(x) + 2sH_{s-1}(x) = 0.$$

30. Que dire, sans calcul, des solutions maximales de (E_s) ? De la structure de l'ensemble des solutions ?

Par la suite, l'expression « solution de (E_s) » fera référence à une solution maximale.

31. Pour tout réel λ, on définit le symbole $(\lambda)_n$ par :

$$(\lambda)_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N}^*,\ (\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-1).$$

Pour $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ et $x \in \mathbf{R}$, on pose, lorsque cette quantité existe :

$$K(\alpha, \beta; x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\beta)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

(a) Montrer que $K(\alpha, \beta; x)$ est bien définie pour $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{-n,\ n \in \mathbf{N}\}$ et $x \in \mathbf{R}$.

(b) À quelle(s) condition(s) la fonction $x \mapsto K(\alpha, \beta; x)$ est elle polynomiale ?

32. On veut déterminer deux solutions de (E_s) définies sur $\mathbf{R}$, notées $y_{1,s}$ et $y_{2,s}$, et vérifiant les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_{1,s}(0) & = & 1 \\ y_{1,s}'(0) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_{2,s}(0) & = & 0 \\ y_{2,s}'(0) & = & 1. \end{array} \right.$$

Établir que $y_{1,s}(x) = K\left(-\dfrac{s}{2}, \dfrac{1}{2}; x^2\right)$ et exprimer $y_{2,s}$ sous une forme analogue.

33. On se place dans le cas où s est un entier naturel ($s = n \in \mathbf{N}$). Exprimer H_n en fonction de $y_{1,n}$ et $y_{2,n}$.

34. Avec les notations précédentes, établir que :

$$\forall s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ \ H_s(x) = \frac{2^s\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} y_{1,s} + \frac{2^{s+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{-s}{2}\right)} y_{2,s}.$$

35. Pour z_1 et z_2, deux solutions de (E_s), on définit le wronskien de z_1 et z_2 au point $x \in \mathbf{R}$ par :

$$w(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Établir l'existence d'une constante $C(z_1, z_2) \in \mathbf{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ \ w(x) = C(z_1, z_2)\, \mathrm{e}^{x^2}$, avec $C(z_1, z_2) = 0$ si et seulement si (z_1, z_2) est lié.

36. Pour tout $s \in \mathbf{R}$, on pose :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \tilde{H}_s(x) = H_s(-x).$$

(a) Montrer que $\tilde{H}_s$ est solution de (E_s).

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur s pour que le couple $(H_s, \tilde{H}_s)$ soit une base de l'espace des solutions de (E_s).

37. On veut préciser le comportement de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

(a) On fixe un entier n. Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose : $\quad g_n(t) = \mathrm{e}^{-t^2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$.

Montrer que : $\quad \left|g_n(t)\right| \leqslant \dfrac{t^{2n+2}}{(n+1)!}$.

(b) On se place dans le cas $s < 0$. Établir, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, l'existence d'un développement :
$$\forall x \in]-\infty, 0[, \quad H_s(x) = (-2x)^s \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (-s)_{2k}}{k!} (2x)^{-2k} + O\left(x^{-2n-2}\right) \right)$$
lorsque x tend vers $-\infty$.

(c) Montrer qu'un tel développement existe, en fait, pour tout $s \in \mathbf{R}$.

(d) En déduire un équivalent de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

38. On étudie maintenant le comportement de $H_s(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(a) Démontrer que, pour $s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$, $H_s(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-s)} x^{-s-1} \mathrm{e}^{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On pourra commencer par traiter le cas où $s < 0$.

(b) Lorsque $s \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$, la fonction $H_s(x)$ admet- elle au voisinage de $+\infty$ un développement de la forme de celui établi en question 37 (b) ?

FIN DU SUJET