Analyse - Révisions Séries entières

Exercice 1 VRAI - FAUX

1. Soit θ un nombre réel et x un nombre réel.
   - Le rayon de convergence de la série $\sum e^{in\theta}x^n$ vaut 1.
   - Les rayons de convergence des séries $\sum \cos(n\theta)x^n$ et $\sum \sin(n\theta)x^n$ valent 1.
2. Si le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R > 0$, alors :
   - la série converge toujours normalement sur $D(0, R)$,
   - ne converge jamais normalement sur $D(0, R)$.
3. Si le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum a_n z^n$ est $R > 0$ et si $|z| > R$, alors la suite $(|a_n z^n|)_n$ tend vers $+\infty$.
4. - Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{n^2 - 3n - 1}{n!}x^n$ vaut 1.
   - Calculer la somme de la série lorsqu'elle converge.
5. - Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum a_n x^n$ avec $a_n = n^{(-1)^n}$ vaut 1.
   - Calculer la somme de la série lorsqu'elle converge.

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+t)^n}dt$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(1+t)^n}dt$. Donner le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum a_n x^n$.

Exercice 3 Soit a un réel strictement positif et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, a[$. On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}$ est positive sur $[0, a[$.

1. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, a[$, on note $R_n(x)$ le reste intégral de la formule de Taylor à l'ordre n, entre 0 et x. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0, a[$.
2. En déduire que f est développable en série entière sur $[0, a[$.
3. Montrer que la fonction tangente est développable en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 4 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et soit $r \in]0, R[$.

1. Montrer que pour tout entier naturel k, la série de fonctions $\sum f_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(\theta) = a_n r^n e^{i(n-k)\theta}$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$.

2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $2\pi a_k r^k = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta$.
3. On suppose que $R = +\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

Exercice 5 Soit (a_n) une suite de réels tel que $\sum a_n x^n$ soit de rayon de convergence 1. On note f la somme de cette série entière. On suppose de plus que la série numérique $\sum a_n$ converge et on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1[$ et tout $n \geq 1$, on a :

$$f(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k(x^k - 1) + (x - 1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k + R_n(x^{n+1} - 1).$$

2. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6 On pose $(E) : y' = 2xy + 1$. L'objectif de cet exercice est de déterminer les solutions de (E).

1. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière, de rayon de convergence supposé non nul. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ \forall \geq 2,\ na_n - 2a_{n-2} = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) développables en série entières est

$$\mathcal{S} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1} + c \exp(x^2),\ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).