

# Chapitre 4

## Liste des sujets d'oral

### Leçons d'algèbre et géométrie

- 101 Groupes monogènes, groupes cycliques. Exemples.
- 102 Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Applications.
- 103 Anneau  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Applications.
- 104 Nombres premiers. Propriétés et applications.
- 106 PGCD dans  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{K}[X]$  où  $\mathbf{K}$  est un corps commutatif, théorème de Bézout. Applications.
- 107 Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
- 109 Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
- 110 Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
- 112 Changements de bases en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.
- 113 Déterminants. Applications.
- 114 Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.
- 117 Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.
- 119 Utilisation des nombres complexes en géométrie.
- 120 Endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien. Applications.
- 121 Réduction et classification des formes quadratiques sur un espace vectoriel réel de dimension finie. Cas d'un espace euclidien. Applications géométriques.
- 123 Isométries du plan affine euclidien, décomposition canonique. Applications.
- 125 Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 3, décomposition canonique. Applications.
- 128 Barycentres. Applications.
- 131 Applications affines en dimension finie. Propriétés et exemples.
- 137 Droites et cercles dans le plan affine euclidien.
- 142 Utilisation de groupes en géométrie.
- 143 Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.
- 144 Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaire. Applications.
- 146 Coniques.
- 150 Diverses factorisations de matrices. Applications.

- 151 Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications. (On supposera connues les notions de valeurs propres, vecteurs propres et sous-espace propres).
- 155 Systèmes d'équations linéaires. Applications.
- 156 Valeurs propres. Recherche et utilisation.
- 158 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 159 Algorithme d'Euclide dans  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{K}[X]$  où  $\mathbf{K}$  est un corps commutatif. Calcul de PGCD et de coefficients de Bézout. Applications.
- 163 Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
- 165 Idéaux d'un anneau commutatif. Exemples.
- 166 Corps des fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif. Applications.
- 167 Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.
- 168 Racines d'un polynôme à une indéterminée. Relations coefficients-racines.
- 169 Structures quotients dans divers domaines de l'algèbre. Applications.
- 170 Méthodes de chiffrement ou de codage. Illustrations.
- 171 Groupe linéaire  $GL(E)$  d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ . Sous-groupes. Applications.
- 172 Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications.

## Leçons d'analyse et probabilités

- 201 Étude de suites numériques définies par différents types de récurrence. On pourra proposer des applications.
- 202 Séries à termes réels positifs. On pourra proposer des applications.
- 203 Séries à termes réels ou complexes : convergence absolue, semi-convergence. (Les résultats relatifs aux séries à termes réels positifs sont supposés connus).
- 204 Espaces vectoriels normés de dimension finie, normes usuelles, équivalence des normes. Applications.
- 205 Espaces préhilbertiens : projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Application à l'approximation des fonctions.
- 206 Parties compactes de  $\mathbf{R}^n$ . Fonctions continues sur une telle partie. Exemples et applications.
- 207 Théorème des valeurs intermédiaires. Applications.
- 208 Théorèmes de points fixes.
- 209 Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.
- 210 Séries entières d'une variable réelle ou complexe. Rayon de convergence. Propriétés de la somme. Exemples.
- 212 Série de Fourier d'une fonction périodique ; propriétés de la somme. Exemples.
- 213 Exponentielle complexe ; fonctions trigonométriques et hyperboliques, nombre  $\pi$ .
- 215 Comparaison d'une série et d'une intégrale. Applications.
- 216 Théorèmes des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles. Applications.
- 217 Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
- 218 Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.
- 219 Fonction réciproque d'une fonction définie sur un intervalle. Continuité, dérivabilité. Exemples.
- 220 Méthodes de calcul approché d'une intégrale. Majoration ou estimation de l'erreur.

- 221** Intégrale impropre d'une fonction continue sur un intervalle de  $\mathbf{R}$  (l'intégration sur un segment étant supposée connue). Exemples.
- 223** Intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre. Propriétés, exemples et applications.
- 224** Équations différentielles linéaires d'ordre deux :  $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ , où  $a, b, c$  sont des fonctions continues sur un intervalle de  $\mathbf{R}$ , à valeurs réelles ou complexes.
- 225** Systèmes différentiels linéaires du premier ordre à coefficients constants. Exemples.
- 227** Fonctions de plusieurs variables : dérivées partielles, différentiabilité, fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Exemples.
- 228** Extremums d'une fonction de plusieurs variables réelles.
- 229** Suites de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli. Variables aléatoires de loi binomiale et approximations de la loi binomiale.
- 230** Probabilité conditionnelle et indépendance. Variables aléatoires indépendantes. Covariance. Exemples.
- 231** Espérance, variance ; loi faible des grands nombres. Applications.
- 232** Variables aléatoires possédant une densité. Exemples.
- 235** Exponentielles de matrices. Applications.
- 237** Construction de l'intégrale et lien avec les primitives.
- 241** Diverses notions de convergence en analyse et en probabilités. Exemples et applications. (Les définitions des notions de convergence sont supposées connues).
- 244** Inégalités en analyse et en probabilités. Par exemple : Cauchy-Schwarz, Markov, Bessel, convexité...
- 249** Loi normale en probabilités et statistiques.
- 251** Diverses méthodes de résolution approchée d'une équation numérique ou d'une équation différentielle.
- 254** Algorithmes d'approximation du nombre  $\pi$ .
- 256** Vitesse de convergence. Méthodes d'accélération de convergence.
- 257** Écriture décimale d'un nombre réel ; cas des nombres rationnels, ...
- 258** Couples de variables aléatoires possédant une densité. Covariance. Exemples d'utilisation.
- 260** Variables aléatoires discrètes, couples de variables aléatoires discrètes. Covariance. Exemples d'application.
- 262** Étude métrique des courbes planes.
- 263** Suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
- 264** Fonctions développables en série entière. Exemples et applications. (Les résultats relatifs aux séries entières sont supposés connus).
- 265** Inversion locale, difféomorphismes. Applications.
- 266** Applications linéaires continues, normes associées. Exemples.
- 267** La fonction Gamma.

## Exemples et exercices d'algèbre et géométrie

- 301** Exercices sur les groupes.
- 302** Exercices faisant intervenir les notions de congruence et de divisibilité dans  $\mathbf{Z}$ .
- 304** Exercices faisant intervenir le théorème de Bézout.
- 305** Exercices illustrant l'utilisation des nombres premiers.
- 306** Exercices faisant intervenir les notions de PGCD et PPCM.

- 307** Exercices faisant intervenir des dénombrements.
- 309** Exercices faisant intervenir des polynômes et fractions rationnelles. On pourra se limiter aux corps de base  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .
- 310** Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
- 311** Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
- 312** Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
- 313** Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
- 314** Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
- 315** Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
- 317** Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
- 319** Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.
- 321** Exercices faisant intervenir la réduction des matrices symétriques réelles dans des domaines variés.
- 322** Exercices sur les formes quadratiques.
- 323** Exercices de géométrie résolus à l'aide des nombres complexes.
- 325** Exercices faisant intervenir des isométries affines en dimensions 2 et 3.
- 326** Exercices faisant intervenir la notion de barycentre ou d'application affine.
- 328** Exemples d'utilisation de transformations en géométrie.
- 330** Exercices faisant intervenir les angles et les distances en dimensions 2 et 3.
- 334** Exercices sur les coniques.
- 339** Exemples d'étude des isométries laissant invariante une partie du plan, une partie de l'espace.
- 340** Exercices faisant intervenir des groupes en géométrie.
- 345** Exercices sur les polygones.
- 346** Exemples de problèmes modélisés par des graphes.
- 348** Exercices illustrant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
- 350** Exercices faisant intervenir des opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Aspects algorithmiques.
- 351** Exercices faisant intervenir des polynômes irréductibles.
- 353** Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.
- 354** Exercices sur les cercles et les sphères.
- 355** Exercices faisant intervenir des automorphismes orthogonaux.
- 356** Exercices utilisant les permutations d'un ensemble fini.
- 357** Exercices utilisant le corps  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ .

## Exemples et exercices d'analyse et probabilités

- 402** Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.
- 403** Exemples d'étude de suites définies par une relation de récurrence.
- 404** Exemples d'étude de la convergence de séries numériques.
- 405** Exemples de calcul exact de la somme d'une série numérique.
- 407** Exemples d'évaluation asymptotique de restes de séries convergentes, de sommes partielles de séries divergentes.
- 408** Exemples d'étude de séries réelles ou complexes non absolument convergentes.
- 409** Exemples d'utilisation de polynômes en analyse.
- 410** Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.

- 411 Exemples d'étude de fonctions définies par une série.
- 412 Exemples de développement d'une fonction en série entière. Applications.
- 413 Exemples d'applications des séries entières.
- 414 Exemples de séries de Fourier et de leurs applications.
- 415 Exemples d'applications du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.
- 417 Exemples illustrant l'approximation de fonctions numériques.
- 418 Exemples d'utilisation de développements limités de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 421 Exemples de calcul exact et de calcul approché de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment. Aspects algorithmiques.
- 422 Exemples d'étude d'intégrales impropres.
- 423 Exemples d'utilisation des théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone.
- 426 Exemples d'utilisation d'intégrales simples et multiples : calculs de longueurs, d'aires, de volumes,  
...
- 427 Exemples d'étude de fonctions définies par une intégrale.
- 428 Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires.
- 429 Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires.
- 430 Exemples d'étude et de résolution d'équations différentielles issues de domaines variés (sciences expérimentales ou autres sciences).
- 431 Exemples de recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une ou plusieurs variables réelles.
- 432 Exemples d'approximations d'un nombre réel. Aspects algorithmiques.
- 434 Exemples d'utilisation de changement de variable(s) en analyse.
- 435 Exemples de modélisations de situations réelles en probabilités.
- 436 Exemples d'applications de l'intégration par parties.
- 437 Exercices faisant intervenir des variables aléatoires.
- 438 Exemples de problèmes de dénombrement. Utilisation en probabilités.
- 439 Exemples d'étude d'applications linéaires continues et de leur norme.
- 440 Exercices sur les propriétés métriques des courbes planes (longueur, courbure...).
- 443 Exemples de méthodes et d'algorithmes de résolution approchée d'équations  $F(X) = 0$ ,  $X$  désignant une variable réelle ou vectorielle.
- 444 Exemples de calcul approché de la limite d'une suite, de la somme d'une série. Aspects algorithmiques.
- 447 Exemples d'équations fonctionnelles.
- 448 Exemples d'estimation en statistiques : estimation ponctuelle, estimation par intervalles de confiance.
- 449 Exemples d'équations différentielles non linéaires.
- 451 Exemples d'applications des transformées de Fourier et de Laplace.
- 452 Exemples d'applications du théorème des fonctions implicites.
- 453 Exercices illustrant l'utilisation de la loi binomiale en probabilités et en statistiques.
- 454 Exemples d'applications de la notion de compacité.
- 455 Exemples d'étude qualitative d'équations différentielles ou de systèmes différentiels.