Chapitre XV

Exemples d'étude et de résolution exacte ou approchée d'équations différentielles scalaires (Leçon 428)

Exercice (1).

1. Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}_1) : \ \sin(t) \cdot y'(t) - 2\cos(t) \cdot y(t) = 0.$$

   Que peut-on dire de la dimension de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$?

2. Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}_2) : \ x^2 \cdot y''(x) - 4x \cdot y'(x) + (x^2 + 6) \cdot y(x) = 0.$$

   a) Déterminer les solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en séries entières.

   b) Quelle est la dimension de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$?

▶ **Corrigé.–**

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ quelconque, sur l'intervalle $I_k =]k\pi\,;(k+1)\pi[$:
   l'équation différentielle $y'(t) = 2 \cdot \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} \cdot y(t)$ a pour solution la fonction $y_k : \ t \mapsto \lambda_k \cdot e^{\int 2\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t} = \lambda_k \cdot e^{2\ln(|\sin(t)|)} = \lambda_k \cdot \sin^2(t)$ (où $\lambda_k \in \mathbb{R}$).
   On vérifie alors facilement que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction
   $$x_k : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \sin^2(t) & \text{si } t \in]k\pi\,;(k+1)\pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$
   est une solution de $(\mathcal{H}_1)$.
   En effet, x_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\,;(k+1)\pi\}$, et on a clairement $x_k(k\pi) = x'_k(k\pi) = 0$.
   Il reste à vérifier assez facilement que la famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre : par conséquent, $\dim\big(S_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})\big) = +\infty$, où $S_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})$ est l'espace des solutions de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On résout ici l'équation différentielle :
   $$(\mathcal{H}_2) : \ x^2 \cdot y''(x) - 4x \cdot y'(x) + (x^2+6) \cdot y(x) = 0.$$
   a) Supposons que $(\mathcal{H}_2$ possède une solution développable en série entière : $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (de rayon de convergence $R > 0$), alors pour tout x tel que $|x| < R$:
   $$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$
   Ainsi, pour tout x tel que $|x| < R$:
   $$\begin{aligned} & 0 = x^2 \cdot y''(x) - 4x \cdot y'(x) + (x^2+6) \cdot y(x) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + (x^2+6)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ \Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n-1) - 4n\big) a_n x^n + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 6a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 5n + 6) a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 6a_0 + 2a_1 \cdot x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big((n^2 - 5n + 6)a_n + a_{n-2}\big)x^n.$$

On en déduit :

$$a_0 = a_1 = 0 \text{ et pour tout entier } n \geqslant 2,\ (n^2 - 5n + 6)a_n + a_{n-2} = 0.$$

Or $(n^2 - 5n + 6) = (n-2)(n-3)$, donc pour $n = 2$ et $n = 3$ on a : $0 \cdot a_n + 0 = 0$, qui est toujours vrai, tandis que pour tout entier $n \geqslant 4$: $a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n-2)(n-3)}$, qui s'écrit aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+2} = \frac{-a_{2n}}{2n(2n-1)} \text{ et } a_{2n+3} = \frac{-a_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Une récurrence facile donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \cdot a_2 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot a_3,$$

d'où la forme générale des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en série entière :

$$\begin{aligned} y(x) &= a_2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-2)!} + a_3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)!} \\ &= a_2 \cdot x^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_3 \cdot x^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= a_2 \cdot x^2 \cdot \cos(x) + a_3 \cdot x^2 \cdot \sin(x). \end{aligned}$$

Remarquons que le rayon de convergence de ces solutions est infini. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en série entière, est donc $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, où $y_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \cdot \cos(x) \end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \cdot \sin(x) \end{array}$.

b) L'espace des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $I_1 =]-\infty\,; 0[$ ou $I_2 =]0\,; +\infty[$ est de dimension 2 et comme y_1 et y_2 sont solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$, ces fonctions sont aussi solutions de l'équation différentielle sur I_1 et sur I_2. On en déduit :

$$S_{\mathcal{H}_2}\big(]-\infty\,; 0[\big) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2) \text{ et } S_{\mathcal{H}_2}\big(]0\,; +\infty[\big) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2).$$

Par conséquent, si y est solution de $\mathcal{H}_2$ sur $\mathbb{R}$, alors y est solution de $(\mathcal{H}_2)$ sur I_1 et sur I_2, donc il existe des réels $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0\,; +\infty[: &\quad y(x) = \lambda_1 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_1 \cdot x^2 \sin(x), \\ \text{et } \forall x \in]0\,; +\infty[: &\quad y(x) = \lambda_2 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_2 \cdot x^2 \sin(x). \end{aligned}$$

Or sur $]-\infty\,;0[$:

$$y'(x) = \lambda_1 \cdot 2x\cos(x) - \lambda_1 \cdot x^2 \sin(x) + \mu_1 \cdot 2x \sin(x) + \mu_1 \cdot x^2 \cos(x)$$

et $y''(x) = \lambda_1 \cdot 2\cos(x) - \lambda_1 \cdot 4x \sin(x) - \lambda_1 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_1 \cdot 2\sin(x)$

$$+ \mu_1 \cdot 4x\cos(x) - \mu_1 \cdot x^2 \sin(x).$$

D'où : $\quad y(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0,\ y'(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0$ et $y''(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 2\lambda_1$.

De même : $\quad y(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0,\ y'(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$ et $y''(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 2\lambda_2$.

On peut donc recoller les solutions au point 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$.

On conclut donc que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$S_{\mathcal{H}_2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(z_1, z_2, z_3),$$

où :

$$z_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2\cos(x) \end{array}, \quad z_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^2\sin(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \quad \text{et } z_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ x^2\sin(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exercice (2).

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$, et soit l'équation
$$(E):\ y''(x)-4y(x)=a|x|+b.$$
Montrer que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ dont la courbe admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$, et déterminer cette solution.
2. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ monotone, admettant une limite finie en $+\infty$.

   Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle
$$(E):\ y''+y=f,$$
sont bornées.

▶ **Corrigé.–**

1. L'équation homogène associée à (E) est $(H):\ y''(x)-4y(x)=0$, dont l'espace des solutions est $\mathcal{S}_H=\left\{\lambda e^{2x}+\mu e^{-2x}\,;\lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$.
On résout (E) sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, et on essaie de recoller en 0.
   - Sur $\mathbb{R}_+$: l'équation devient $y''(x)-4y(x)=ax+b$, dont une solution particulière est clairement $y_p^+:\ x\mapsto-\frac{1}{4}(ax+b)$.
   Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+$ sont donc les fonctions de la forme :
$$y_+:\ x\mapsto\lambda_+e^{2x}+\mu_+e^{-2x}-\tfrac{a}{4}x-\tfrac{b}{4}\quad(\lambda_+,\mu_+\in\mathbb{R})\cdot$$
   - Sur $\mathbb{R}_-$, l'équation devient $y''(x)-4y(x)=-ax+b$, dont une solution particulière évidente est $y_p^-:\ x\mapsto\frac{1}{4}(ax-b)\ \cdot$
   Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_-$ sont donc les fonctions de la forme :
$$y_-:\ x\mapsto\lambda_-e^{2x}+\mu_-e^{-2x}+\tfrac{a}{4}x-\tfrac{b}{4}\quad(\lambda_-,\mu_-\in\mathbb{R})\cdot$$

   Ainsi, si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors il existe $\lambda_+,\mu_+,\lambda_-,\mu_-$ des réels tels que :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=\begin{cases}\lambda_+e^{2x}+\mu_+e^{-2x}-\frac{a}{4}x-\frac{b}{4} & \text{si } x\geqslant0\\ \lambda_-e^{2x}+\mu_-e^{-2x}+\frac{a}{4}x-\frac{b}{4} & \text{si } x\leqslant0\end{cases}.$$
   Comme on veut que la courbe de y admette une asymptote en $+\infty$, alors $\lambda_+=0$ et de même une asymptote en $-\infty$ impose $\mu_-=0$, ce qui réduit l'expression de la solution à :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y(x)=\begin{cases}\mu_+e^{-2x}-\frac{a}{4}x-\frac{b}{4} & \text{si } x\geqslant0\\ \lambda_-e^{2x}+\frac{a}{4}x-\frac{b}{4} & \text{si } x\leqslant0\end{cases}.$$

La continuité au point 0 de la solution y implique :

$$\mu_+ - \tfrac{b}{4} = \lambda_- - \tfrac{b}{4}, \text{ soit } \mu_+ = \lambda_-.$$

On note λ cette valeur commune, de sorte que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \lambda e^{-2x} - \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \lambda e^{2x} + \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases},$$

donc : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) = \begin{cases} -2\lambda e^{-2x} - \frac{a}{4} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 2\lambda e^{2x} + \frac{a}{4} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.$

La dérivabilité de la solution y au point 0 implique :

$$-2\lambda - \tfrac{a}{4} = 2\lambda + \tfrac{a}{4}, \text{ soit } \lambda = -\tfrac{a}{8},$$

Avec ces valeurs : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) = \begin{cases} -\frac{a}{2}e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{a}{2}e^{2x} & \text{si } x < 0 \end{cases},$

de sorte que y' est dérivable en 0. On en déduit que la fonction

$$y:\ x \mapsto \begin{cases} -\frac{a}{8}e^{-2x} - \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \geqslant 0 \\ -\frac{a}{8}e^{2x} + \frac{a}{4}x - \frac{b}{4} & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} = -\tfrac{a}{8}e^{-2|x|} - \tfrac{a}{4}|x| - \tfrac{b}{4},$$

est l'unique solution de (E) qui admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On considère maintenant l'équation différentielle $(E):\ y'' + y = f$.
L'équation homogène associée est $(H):\ y'' + y = 0$, donc l'espace des solutions est $\mathcal{S}_H = \left\{\lambda \cdot \cos + \mu \cdot \sin\,;\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.

On adopte ici une approche matricielle en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$,

de sorte que $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -y + f \end{pmatrix}$, qui s'écrit sous la forme

$$(E_1):\ Y' = AY + B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

L'équation homogène associée est $(H_1):\ Y' = AY$, dont $Y_1 = \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix}$

et $Y_2 = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix}$ sont deux solutions linéairement indépendantes.

Les solutions de (H_1) sont dont de la forme :

$$\lambda_1 \cdot H_1 + \lambda_2 \cdot H_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} \cos \\ -\sin \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

ce qui signifie que l'espace des solutions de (H_1) est l'ensemble des fonctions $t \mapsto M(t)\Lambda$, où $M(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ et $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

On utilise maintenant la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E_1), en posant : $Y_p(t) = M(t)\Lambda(t)$, où $\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix}$. Pour tout réel positif t :

$$\begin{aligned} Y_p'(t) &= M'(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) \\ &= AM(t)\Lambda(t) + M(t)\Lambda'(t) \\ &\text{car } M'(t) = \begin{pmatrix} Y_1'(t) & Y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY_1(t) & AY_2(t) \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) \end{pmatrix} = AM(t) \\ &= AY_p(t) + M(t)\Lambda'(t). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$M(t)\Lambda'(t) = Y_p'(t) - AY_p(t) = B(t), \text{ soit } \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \cos(t)\lambda_1'(t) + \sin(t)\lambda_2'(t) = 0 \\ \text{et } -\sin(t)\lambda_1'(t) + \cos(t)\lambda_2'(t) = f(t) \end{cases},$$

ce qui donne : $\lambda_1'(t) = -f(t)\sin(t)$ et $\lambda_2'(t) = f(t)\cos(t)$.
On peut alors choisir, par exemple :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda_1(t) = \int_0^t -f(x)\sin(x)\mathrm{d}x \text{ et } \lambda_2(t) = \int_0^t f(x)\cos(x)\mathrm{d}x.$$

Avec $Y_p(t) = \begin{pmatrix} y_p(t) \\ y_p'(t) \end{pmatrix}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y_p(t) &= \lambda_1(t)\cos(t) + \lambda_2(t)\sin(t) \\ &= \Big(-\int_0^t \sin(u)f(u)\mathrm{d}u\Big)\cos(t) + \Big(\int_0^t \cos(u)f(u)\mathrm{d}u\Big)\sin(t) \\ &= \int_0^t f(u)\big(\sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)\big)\mathrm{d}u \\ &= \int_0^t f(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

donc les solutions de (E) sont les fonctions de la forme :

$$y : t \mapsto \lambda \cdot \cos(t) + \mu \cdot \sin(t) + \int_0^t f(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Pour montrer qu'une solution quelconque y est bornée, il suffit donc de le prouver pour la solution particulière y_p trouvée ci-dessus.
La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut réaliser une intégration

par parties dans $y_p(t) = \displaystyle\int_0^t f(u)\sin(t-u)\mathrm{d}u$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y_p(t) = \Big[f(u)\cos(t-u)\Big]_0^t - \int_0^t f'(u)\cos(t-u)\mathrm{d}u$$
$$= f(t) - f(0)\cos(t) - \int_0^t f'(u)\cos(t-u)\mathrm{d}u.$$

Or f est continue et admet une limite finie en $+\infty$: elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$.
Notons M un réel positif tel que : $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f(t)| \leqslant M.$
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\left| \int_0^t f'(u)\cos(t-u)\mathrm{d}u \right| \leqslant \left| \int_0^t |f'(u)|\mathrm{d}u \right|,$$

et comme f est monotone sur $\mathbb{R}_+$, alors f' garde un signe constant sur l'intervalle, de sorte que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \int_0^t |f'(u)|\mathrm{d}u \right| = \left| \int_0^t f'(u)\mathrm{d}u \right| = \big|f(t) - f(0)\big|$$
$$\leqslant |f(t)| + |f(0)| \leqslant 2M.$$

De tout ceci, on déduit bien que les solutions de (E) sont toutes bornées.

Exercice (3).

1. Soit la série entière $\sum \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}\cdot$

   Déterminer son rayon de convergence, et montrer que sa somme vérifie sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle :
$$(E) \qquad y''(x) + y'(x) + y(x) = e^x.$$
   En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\cdot$$

2. Soit l'équation
$$(S.L.): \quad y''(x) + q(x)\cdot y(x) = 0,$$
   où $q:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, négative et non nulle sur $\mathbb{R}$.

   a) i. Montrer que si y est une solution réelle de $(S.L.)$, alors la fonction y^2 est convexe.

      ii. Montrer que si y est une solution réelle positive de $(S.L.)$ sur un intervalle I, alors y est convexe sur I.

      iii. Montrer que la fonction nulle est l'unique solution réelle bornée
      de $(S.L.)$.

   b) Soit φ la solution réelle de $(S.L.)$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

      i. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \geqslant 1$, puis que $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant 1$ et que φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

      ii. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $q(x) \leqslant -\alpha^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

      Montrer que $\varphi(x) \geqslant \mathrm{ch}(\alpha x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

      Indication : écrire $\varphi'' - \alpha^2\varphi = f$ avec $f(x) = -\big(q(x) + \alpha^2\big)\varphi(x)$,
      et utiliser la méthode de variation des constantes.

▶ **Corrigé.–**

1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $u_n = \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}\cdot$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\neq 0$: $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\dfrac{|x|^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0,$
donc le rayon de convergence de cette série entière est $R=+\infty$.
Soit alors la fonction somme $S:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}\end{array}.$

On sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}\ \text{ et }\ S''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}.$$

Ainsi :

$$S(x)+S'(x)+S''(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}+\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.$$

L'équation du second degré $T^2+T+1=0$ admet deux solutions complexes conjuguées $-\frac{1}{2}\pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc les solutions de l'équation homogène $S''(x)+S'(x)+S(x)=0$ sont de la forme :

$$x\mapsto e^{-\frac{1}{2}x}\Big(\lambda\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big)+\mu\sin\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\big),\ \text{où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux réels.}$$

En vérifiant facilement que la fonction $x\mapsto\frac{1}{3}e^x$ est une solution particulière de l'équation (E), on obtient la forme générale des solutions de cette équation différentielle :

il existe $\lambda,\ \mu\in\mathbb{R}$ tels que pour tout $x\in\mathbb{R},\ S(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\Big(\lambda\cos\big(\frac{\sqrt{3}}{2}\big)+\mu\sin\big(\frac{\sqrt{3}}{2}x\big)\Big).$

De plus : $S(0)=1=\lambda+\frac{1}{3}$, donc $\lambda=\frac{2}{3}\cdot$
Par ailleurs, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}S'(x)&=-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}\Big(\lambda\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big)+\mu\sin\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big)\Big)\\&\qquad+e^{-\frac{x}{2}}\Big(-\lambda\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big)+\mu\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big)+\tfrac{1}{3}e^x,\end{aligned}$$

donc : $S'(0)=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mu+\frac{1}{3}$, et d'autre part $S'(0)=0$.
Puisque $\lambda=\frac{2}{3}$, alors $\mu=\frac{2}{\sqrt{3}}\big(\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{3}\big)=0$, de sorte que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad S(x)=\tfrac{1}{3}e^x+\tfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x\big)\cdot$$

2. a) Soit l'équation

$$(S.L.):\quad y''(x)+q(x)\cdot y(x)=0,$$

où $q:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, négative et non nulle sur $\mathbb{R}$.

i. Pour tout réel x : $\big(y^2)\big)'(x) = 2y'(x)y(x)$, et :

$$(y^2)''(x) = 2\Big(\big(y'(x)\big)^2 - q(x)\big(y(x)\big)^2\Big) \geqslant 0 \quad \text{car } q(x) \leqslant 0.$$

La fonction y^2 est donc bien convexe sur $\mathbb{R}$.

ii. Pour tout $x \in I$: $y''(x) = -q(x)y(x) \geqslant 0$ car $y(x) \geqslant 0$ et $q(x) \leqslant 0$, donc la fonction y est convexe sur I.

iii. On sait que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et bornée, alors g est constante ; en effet, pour tous réels a et b tels que $a < b$:

- Si $g(b) > g(a)$ alors pour tout $x > b$, puisque g est convexe alors $g(b) \leqslant g(a) + \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}(b-a)$, d'où $g(x) \geqslant g(a) + \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)\cdot$ Le terme de droite tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que g est bornée.
- Si $g(b) < g(a)$ alors pour tout $x < a$, toujours par convexité de g : $g(a) \leqslant g(b) + \dfrac{g(b)-g(x)}{b-x}(a-b)$, d'où $g(x) \geqslant g(b) + \dfrac{g(a)-g(b)}{x-b}\cdot$ À nouveau le terme de droite tend vers $+\infty$ quand x tend cette fois vers $-\infty$, ce qui contredit encore le fait que g est bornée.

On en déduit que pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $g(a) = g(b)$ et on a bien prouvé que g est constante.
Or d'après i., la fonction y^2 est constante sur $\mathbb{R}$: on en déduit donc qu'elle est constante sur $\mathbb{R}$; la fonction $|y|$ est donc elle-même constante, et comme y est continue sur $\mathbb{R}$, alors elle est à son tour constante.
Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $y(x) = c$ pour tout réel x.
Mais alors, $y''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Comme la fonction q n'est pas nulle, il existe un réel x_0 tel que $q(x_0) \neq 0$, et alors : $\quad c = y(x_0) = -\dfrac{1}{q(x_0)}y''(x_0) = 0$, ce qui prouve que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = 0$.

b) Soit φ la solution réelle de $(S.L.)$ telle que $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

i. D'après a)i., la fonction φ^2 est convexe sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\varphi(x)\big)^2 \geqslant \big(\varphi(0)\big)^2 + x\Big(\big(\varphi^2\big)'(0)\Big) = \big(\varphi(0)\big)^2 + 2x\varphi(0)\varphi'(0) = 1 + 0 = 1.$$

Ainsi : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \big|\varphi(x)\big| \geqslant 1$.
Posons alors $A = \varphi^{-1}\big([1\,;+\infty[\big)$: comme φ est continue, A est donc une partie fermée de $\mathbb{R}$, et $A = \mathbb{R} \setminus \varphi^{-1}\big(]-\infty\,;-1]\big)$ est un

ouvert de $\mathbb{R}$.
De plus $0 \in A$, donc A est une partie non vide, à la fois ouverte et fermée de $\mathbb{R}$, et par conséquent $A = \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\varphi(t) \geqslant 1$ pour tout réel x. D'après a)ii., φ est donc convexe sur $\mathbb{R}$.

ii. Pour tout réel x :

$$\varphi''(x) - \alpha^2\varphi(x) = f(x) \quad \text{avec } f(x) = -\big(q(x) + \alpha^2\big)\varphi(x).$$

L'espace des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{H})$: $y'' - \alpha^2 y = 0$ est $\big\{x \mapsto \lambda \cdot \mathrm{ch}(\alpha x) + \mu \cdot \mathrm{sh}(\alpha x)\,;\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\big\}$.
On utilise alors la méthode de variation des constantes, en considérant que λ et μ sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et on cherche une solution particulière sous la forme $\varphi_p :\ x \mapsto \lambda(x) \cdot \mathrm{ch}(\alpha x) + \mu(x) \cdot \mathrm{sh}(\alpha x)$, où :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \lambda'(x)\mathrm{ch}(\alpha x) + \mu'(x)\mathrm{sh}(\alpha x) & = 0 \\ \alpha\lambda'(x)\mathrm{sh}(\alpha x) + \alpha\mu'(x)\mathrm{ch}(\alpha x) & = f(x) \end{cases}.$$

Ainsi : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ \lambda'(x) = -\dfrac{1}{\alpha} f(x)\mathrm{sh}(\alpha x)$ et $\mu'(x) = \dfrac{1}{\alpha} f(x)\mathrm{ch}(\alpha x)$, et pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= -\frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\big(\mathrm{sh}(\alpha t)\mathrm{ch}(\alpha x) - \mathrm{ch}(\alpha t)\mathrm{sh}(\alpha x)\big)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\mathrm{sh}\big(\alpha(x-t)\big)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

de sorte que les solutions de l'équation (S.L.) sont de la forme :

$$\varphi :\ x \mapsto \lambda \cdot \mathrm{ch}(\alpha x) + \mu \cdot \mathrm{sh}(\alpha x) + \frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\mathrm{sh}\big(\alpha(x-t)\big)\mathrm{d}t\cdot$$

Les conditions initiales donnent de plus :

$$1 = \varphi(0) = \lambda \text{ et } 0 = \varphi'(0) = \alpha\mu + \varphi_p'(0) = \alpha\mu,$$

de sorte que la solution cherchée vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \mathrm{ch}(\alpha x) + \frac{1}{\alpha}\int_0^x f(t)\mathrm{sh}\big(\alpha(x-t)\big)\mathrm{d}t \geqslant \mathrm{ch}(\alpha x)\cdot$$

Exercice (4). Équation de Hill

Soit l'équation différentielle :

$$(\mathcal{H}): \quad y'' + q \cdot y = 0,$$

où $q:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, périodique de période $T > 0$.

1. Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 de $(\mathcal{H})$ telles que : $\begin{cases} y_1(0) & = 1 \\ y_1'(0) & = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_2(0) & = 0 \\ y_2'(0) & = 1 \end{cases}$, que l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$
   est $S_{\mathcal{H}} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, et montrer que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = y_1(t) \cdot y_2'(t) - y_1'(t) \cdot y_2(t) = 1.$$
2. Montrer que si y est une solution de $(\mathcal{H})$, alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ est aussi solution, et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{cases} y_1(t+T) & = y_1(T) \cdot y_1(t) + y_1'(T) \cdot y_2(t) \\ \text{et} & \\ y_2(t+T) & = y_2(T) \cdot y_1(t) + y_2'(T) \cdot y_2(t) \end{cases}.$$
3. Soit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = e^{\lambda T}$.
   Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) L'équation $(\mathcal{H})$ possède une solution y non nulle qui vérifie :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu \cdot y'(t).$$
   (ii) Le réel μ est solution de l'équation d'inconnue x :
   $$x^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big) \cdot x + 1 = 0.$$
   (iii) L'équation différentielle $(\mathcal{H})$ possède une solution y non nulle telle que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\lambda t} \cdot u(t),$$
   où u est une fonction T-périodique.
4. Soit y une solution de $(\mathcal{H})$, et μ_1, μ_2 les racines complexes de l'équation du second degré $x^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big)x + 1 = 0$.
   a) Montrer que si $\mu_1 \neq \mu_2$ et si λ est un complexe tel que $\mu_1 = e^{\lambda T}$, alors il existe deux fonctions T-périodiques w_1 et w_2, ainsi que deux complexes α et β tels que :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha \cdot e^{\lambda t} w_1(t) + \beta \cdot e^{-\lambda t} w_2(t).$$

b) Montrer que si $\mu_1 = \mu_2$, alors $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ et que l'équation $(\mathcal{H})$ admet une solution périodique.

▶ **Corrigé.–**

1. La fonction $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, donc étant donné $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire assure l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(0) = \alpha \text{ et } y'(0) = \beta \end{cases}$, et assure aussi que cette solution est globale (définie sur $\mathbb{R}$, donc).
L'existence et l'unicite des solutions y_1 et y_2 demandées par l'énoncé sont donc garanties ; ces deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, et :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t),$$
d'où, pour tout réel t :
$$\begin{aligned} w'(t) &= y_1(t)y_2''(t) + y_1'(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2'(t) - y_1''(t)y_2(t) \\ &= y_1(t)\big(-q(t)y_2(t)\big) - \big(-q(t)y_1(t)\big)y_2(t) = 0, \end{aligned}$$
ce qui prouve que w est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $w(0) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, alors $w(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ce déterminant n'étant jamais nul, les fonctions y_1 et y_2 sont par conséquent linéairement indépendantes.
On sait de plus, d'après le cours, que l'espace des solutions de (H) sur $\mathbb{R}$ est de dimension 2, donc :
$$\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(y_1, y_2).$$

2. Avec une solution y de (H), on a :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t+T) + q(t+T)y(t+T) = 0 \Leftrightarrow y''(t+T) + q(t)y(t+T) = 0,$$
car q est T-périodique ; cela prouve que la fonction $t \mapsto y(t+T)$ est solution de (H), donc élément de $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$.
En particulier, les fonctions $t \mapsto y_1(t+T)$ et $t \mapsto y_2(t+T)$ sont solutions de (H), donc il existe c_1, c_2, d_1, d_2 quatre réels tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t+T) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) \text{ et } y_2(t+T) = d_1 \cdot y_1(t) + d_2 \cdot y_2(t).$$
Par dérivation de ces relations, on obtient :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1'(t+T) = c_1 \cdot y_1'(t) + c_2 \cdot y_2'(t) \text{ et } y_2'(t+T) = d_1 \cdot y_1'(t) + d_2 \cdot y_2'(t).$$
En particulier pour $t = 0$, on obtient :
$$y_1(T) = c_1 \cdot y_1(0) + c_2 \cdot y_2(0) = c_1\ ; \quad y_2(T) = d_1 \cdot y_1(0) + d_2 \cdot y_2(0) = d_1\ ;$$

$$y_1'(T) = c_1 \cdot y_1'(0) + c_2 \cdot y_2'(0)\,; \quad y_2'(T) = d_1 \cdot y_1'(0) + d_2 \cdot y_2'(0) = d_2.$$

Ainsi : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} y_1(t+T) & = y_1(T)y_1(t) + y_1'(T)y_2(t) \\ y_2(t+T) & = y_2(T)y_1(t) + y_2'(T)y_2(t) \end{cases}.$

3. Montrons que les propositions (i) et (ii) sont équivalentes.

$$(i) \Leftrightarrow \big(\exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\,;\ y = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \text{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ y(t+T) = \mu \cdot y(t)\big).$$

Or, d'après les résultats précédents :

$$\big(y(t+T) = \mu y(t)\big) \Leftrightarrow \Big(\alpha y_1(t+T) + \beta y_2(t+T) = \mu\big(\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)\big)\Big)$$
$$\Leftrightarrow \alpha\big(y_1(T)y_1(t) + y_1'(T)y_2(t)\big) + \beta\big(y_2(T)y_1(t) + y_2'(T)y_2(t)\big) = \alpha\mu y_1(t) + \beta\mu y_2(t)$$
$$\Leftrightarrow \Big(\big(y_1(T)-\mu\big)\alpha + y_2(T)\beta\Big)y_1(t) + \Big(y_1'(T)\alpha + \big(y_2'(T)-\mu\big)\beta\Big)y_2(t) = 0.$$

Les fonctions y_1 et y_2 étant linéairement indépendantes : la proposition (i) est équivalente au fait qu'il existe $(\alpha\,,\beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que

$$\begin{cases} \big(y_1(T)-\mu\big)\alpha + y_2(T)\beta & = 0 \\ y_1'(T)\alpha + \big(y_2'(T)-\mu\big)\beta & = 0 \end{cases}.$$

Matriciellement, cela s'écrit : $\begin{pmatrix} y_1(T)-\mu & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T)-\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

La proposition (i) est donc équivalente au fait que :

$$\det \begin{pmatrix} y_1(T)-\mu & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T)-\mu \end{pmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow \mu^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big)\mu + \underbrace{y_1(T)y_2'(T) - y_1'(T)y_2(T)}_{=w(T),\ \text{cf. q. 1.}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \mu^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big)\mu + 1 = 0 \qquad \text{d'après 1.}$$

Les propositions (i) et (ii) sont donc équivalentes.

Montrons désormais que les propositions (i) et (iii) sont équivalentes. Pour y une solution de (H), on définit $u : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{-\lambda t}y(t) \end{array}$. Alors :

$$(i) \Leftrightarrow \exists\ y \in \mathcal{S}_H\,;\ \forall t \in \mathbb{R},\ y(t+T) = \mu y(t) = e^{\lambda T}$$
$$\Leftrightarrow \exists\ y \in \mathcal{S}_H\,;\ \forall t \in \mathbb{R},\ u(t+T) = e^{-\lambda(t+T)}y(t+T) = e^{\lambda t}e^{-\lambda T}\mu y(t)$$
$$\Leftrightarrow \exists\ y \in \mathcal{S}_H\,;\ \forall t \in \mathbb{R},\ u(t+T) = e^{-\lambda t}y(t) = u(t) \quad \text{puisque } e^{-\lambda T}\mu = 1.$$

Les propositions (i) et (iii) sont donc bien équivalentes.

4. a) Si $\mu_1 \neq \mu_2$, alors d'après 3. il existe deux solutions y_1 et y_2 de $(\mathcal{H})$ qui vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y_1(t+T) = \mu_1 \cdot y_1(t) \quad \text{et} \quad y_2(t+T) = \mu_2 \cdot y_2(t).$$

Soient alors α et β deux complexes tels que $\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 = 0$, c'est-à-dire : $\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot y_1(t) + \beta \cdot y_2(t) = 0$.
On alors aussi : $\forall t \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot y_1(t+T) + \beta \cdot y_2(t+T) = 0$, soit $\alpha\mu_1 \cdot y_1(t) + \beta\mu_2 \cdot y_2(t) = 0$, et puisque $\mu_1 \neq \mu_2$, alors ces deux équations combinées impliquent que $\alpha = \beta = 0$.
L'espace des solutions $S_{\mathcal{H}}$ de l'équation $(\mathcal{H})$ est donc $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$ qui est de dimension 2.
De plus, d'après 3.iii. il existe deux fonctions périodiques w_1 et w_2 telle que pour tout réel t, $y_1(t) = e^{\lambda_1 t} w_1(t)$ et $y_2(t) = e^{\lambda_2 t} w_2(t)$, où $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ est tel que $e^{\lambda_2 T} = \mu_2$.
On a ainsi : $1 = \mu_1\mu_2 = e^{\lambda_1 T} e^{\lambda_2 T} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)T}$, ce qui entraîne $\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = -\lambda_1 = -\lambda$, soit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = \alpha e^{\lambda t} w_1(t) + \beta e^{-\lambda t} w_2(t).$$

b) Les complexes μ_1 et μ_2 sont les racines de l'équation du second degré $x^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big)x + 1 = 0$, donc $\mu_1\mu_2 = 1$.
Si de plus $\mu_1 = \mu_2$, alors $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ou $\mu_1 = \mu_2 = -1$.
D'après la question 3., il existe donc une solution z de $(\mathcal{H})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ z(t+T) = \mu \cdot z(t) \quad \text{avec } \mu = 1 \text{ ou } \mu = -1.$$

Si $\mu = 1$ alors cette solution est T-périodique, et si $\mu = -1$ alors cette solution est $(2T)$-périodique.

Exercice (5).

Soit l'équation différentielle $(E):\ x'(t) = x(t) - \big(x(t)\big)^2$.

1. a) Déterminer les solutions constantes de (E).

   b) On note $x_0 = x(0)$; étudier les solutions maximales de (E) selon que $x_0 \in]0\,;1[$, $x_0 \in]1\,;+\infty[$ ou $x_0 \in]-\infty\,;0[$.

2. Déterminer les solutions maximales de (E).

▶ **Corrigé.–**

1. Il s'agit d'une équation différentielle autonome du type $x'(t) = f\big(x(t)\big)$ avec $f:\ x \mapsto x - x^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc, qui assure que pour tout couple $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale x de (E) telle que $x(t_0) = x_0$, qui est définie sur un intervalle ouvert $]\alpha\,;\beta[$ avec $\alpha \in [-\infty\,;+\infty[$ et $\beta \in]-\infty\,;+\infty]$.

   a) On a $f(x) = 0 \Leftrightarrow x - x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$, donc les solutions constantes de (E) sont les fonctions $x_1:\ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto 0\end{array}$ et $x_2:\ \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R}\\ x \mapsto 1\end{array}$.

   b) D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si x est une solution non constante de (E), alors pour tout $t \in]\alpha\,;\beta[$, $x(t) \neq 0$ et $x(t) \neq 1$.
   Le théorème des valeurs intermédiaires assure alors que la courbe de la solution x ne peut couper ni la droite d'équation $y = 0$, ni la droite d'équation $y = 1$.

   Premier cas.
   Si $x_0 \in]0\,;1[$, alors pour tout $t \in I =]\alpha\,;\beta[$: $0 < x(t) < 1$. Montrons alors que $\beta = +\infty$.
   Pour tout $t \in I$, $x'(t) = \dfrac{1}{x(t)\big(1 - x(t)\big)} > 0$, donc la fonction x est strictement croissante sur I, et comme elle est majorée par 1, alors $\lim\limits_{t \to \beta^-} x(t)$ existe et est un nombre $\ell \in]0\,;1]$.
   Si $\beta \neq +\infty$, alors la solution maximale y de (E) qui vérifie $y(\beta) = \ell$ est définie sur un intervalle ouvert J qui contient β.
   Or x et y sont alors solutions de (E) sur $I \cap J$: par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, on a donc $x = y$ sur $I \cap J$, et on peut alors prolonger la solution maximale x à $I \cap \big(J \cap [\beta\,;+\infty[\big)$.
   Cela contredit le caractère maximal de la soltion x ; on en déduit que $\beta = +\infty$.
   Montrons maintenant que $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$.

La fonction x est croissante sur I et à valeurs dans $]0\,;1[$, donc admet une limite $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=\ell\in]0\,;1]$.

Si $\ell<1$, alors $x'(t)=\dfrac{1}{x(t)\big(1-x(t)\big)}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\dfrac{1}{\ell(1-\ell)}>0$.

Il existe donc $A>0$ tel que pour tout $t>A$, $x'(t)\geqslant\dfrac{1}{2\ell(1-\ell)}>0$.

Mais alors, pour tout $t>A$:

$$x(t)-x(A)=\int_A^t x'(u)\mathrm{d}u\geqslant\int_A^t\frac{1}{2\ell(1-\ell)}\mathrm{d}u=\frac{t-A}{2\ell(1-\ell)}\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty\cdot$$

Cela contredit bien sûr le fait que $x(t)<1$ pour tout $t\in I$: on a donc prouvé par l'absurde que $\ell=1=\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$.

Un raisonnement analogue montrera que $\lim\limits_{x\to-\infty} x(t)=0$.

Deuxième cas.
Si $x_0\in]1\,;+\infty[$, alors pour tout $t\in I=]\alpha\,;\beta[$, $x(t)>1$
et $x'(t)=\dfrac{1}{x(t)\big(1-x(t)\big)}<0$.

La fonction x est alors strictement décroissante sur $I=]\alpha\,;\beta[$, et comme elle est minorée par 1, alors $\lim\limits_{t\to\beta^-} x(t)$ existe et appartient à $[1\,;+\infty[$.

On montre alors, comme dans le premier cas, que $\beta=+\infty$ et que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=1$.

Remarque : on peut aussi montrer que dans ce cas, $\alpha\in\mathbb{R}_-$ *et que* $\lim\limits_{t\to\alpha^+} x(t)=-\infty$.

Troisième cas. Si $x_0\in]-\infty\,;0[$, alors on prouve de façon analogue que $\alpha=-\infty$ et $\beta\in\mathbb{R}_+$, avec :

$$\lim_{t\to-\infty} x(t)=0 \quad\text{et}\quad \lim_{t\to\beta^-} x(t)=+\infty.$$

2. On suppose désormais que $x_0\notin\{0\,;1\}$. Alors d'après ce qui a été fait à la question 1., on a $x(t)\notin\{0\,;1\}$ pour tout $t\in I=]\alpha\,;\beta[$, et on peut donc réécrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\forall t\in I,\ \frac{x'(t)}{x(t)\big(1-x(t)\big)}=1,\ \text{ou encore}\ \frac{x'(t)}{x(t)}-\frac{x'(t)}{x(t)-1}=1\cdot$$

En reconnaissant des formules de dérivées classiques, on en déduit qu'il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $t\in I$, $\ln\left(\left|\dfrac{x(t)}{x(t)-1}\right|\right)=t+c$,

soit $\left|\dfrac{x(t)}{x(t)-1}\right|=Ke^t$ (où de fait, $K=e^c$).

On dans chacun des trois cas étudiés précédemment, le quotient $\dfrac{x(t)}{x(t)-1}$ garde un signe constant sur I.

On peut donc écrire : $\quad \forall t \in I,\ \dfrac{x(t)}{x(t)-1} = \lambda e^t$, où $\lambda = \dfrac{x_0}{x_0-1} \begin{cases} <0 & \text{si } x_0 \in]0\,;1[\\ >0 & \text{sinon} \end{cases}$,

soit :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = \lambda e^t x(t) - \lambda e^t \Leftrightarrow x(t) = \frac{\lambda e^t}{\lambda e^t - 1} = \frac{\frac{x_0}{x_0-1} e^t}{\frac{x_0}{x_0-1} e^t - 1}$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{x_0 e^t}{x_0 e^t + 1 - x_0}.$$

Il reste à remarquer que :

$$x_0 e^t + 1 - x_0 = 0 \Leftrightarrow e^t = \frac{x_0 - 1}{x_0} \Leftrightarrow t = \ln\left(\frac{x_0-1}{x_0}\right),$$

d'où :

- Si $x_0 > 1$, alors $I =]\alpha\,;+\infty[= \left]\ln\left(\frac{x_0-1}{x_0}\right);+\infty\right[$,
- Et si $x_0 < 0$, alors $I =]-\infty\,;\beta[= \left]-\infty\,;\ln\left(\frac{x_0-1}{x_0}\right)\right[$ ·

Exercice (6). Cauchy-Lipschtiz linéaire par approximation uniforme

Soient a, b deux réels avec $a < b$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
soient $A:\begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})\\ t \mapsto A(t)\end{array}$ et $B:\begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\\ t \mapsto B(t)\end{array}$ deux fonctions continues ; soit $(t_0, X_0) \in [a\,;b] \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et soit le problème de Cauchy :

$$\text{(C.L.)} \quad \begin{cases} X'(t) & = A(t)X(t) + B(t) \\ X(t_0) & = X_0 \end{cases}.$$

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'une norme $||\cdot||$, et $E = \mathcal{C}\big([a\,;b],\ \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$ de la norme $||\cdot||_\infty :\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ Y \mapsto \max\limits_{t\in[a\,;b]} ||Y(t)|| \end{array}$.

On définit aussi la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ par : $X_0 :\begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\\ t \mapsto X_0\end{array}$, et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_{p+1} :\begin{array}{l}[a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto X_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u\end{array}$.

1. Justifier que $\big(E, ||\cdot||_\infty\big)$ est un espace de Banach, et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $X_p \in E$.
2. Montrer par récurrence, que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$;
$$\forall t \in [a\,;b], \quad ||X_{p+1}(t) - X_p(t)|| \leqslant \frac{M^p}{p!}|t - t_0|^p ||X_1 - X_0||_\infty,$$
où $M = \max\limits_{t\in[a\,;b]} |||A(u)|||$, avec $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(E)$ subordonnée à la norme $||\cdot||$.
3. En déduire que la série $\sum \big(X_{p+1} - X_p\big)$ converge normalement sur $[a\,;b]$, et en déduire que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers un élément X de E qui est une solution de l'équation (C.L.).
4. **Application :** en utilisant les approximations successives (méthode ci-dessus), résoudre l'équation différentielle :
$$\begin{cases} y'(t) & = 1 + y(t) \\ y(0) & = 2 \end{cases}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. On sait d'après le cours, que $\big(E, ||\cdot||_\infty\big)$ est un espace de Banach.
Montrons par récurrence que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $X_p \in E$.
Initialisation. La fonction constante $X_0 : \begin{array}{l} [a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto X_0 \end{array}$ est bien sûr continue et appartient à E.
Hypothèse de récurrence : $X_p \in E$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$.
Hérédité. Les fonctions A, X_p et B sont continues, donc la fonction $t \mapsto A(t)X_p(t) + B(t)$, de $[a\,;b]$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est continue.
La fonction $X_{p+1} : \begin{array}{l} [a\,;b] \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^t \big(A(u)X_p(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u \end{array}$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$, donc a foriori elle est continue, et $X_{p+1} \in E$.

2. On raisonne à nouveau par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Pour tout $t \in [a\,;b]$,
$$||X_1(t) - X_0(t)|| \leqslant ||X_1 - X_0||\infty = \frac{M^0}{0!}|t - t_0|^0 \cdot ||X_1 - X_0||\cdot$$
Hypothèse de récurrence :
$$\forall t \in [a\,;b],\ ||X_{p+1}(t) - X_p(t)|| \leqslant \frac{M^p}{p!}|t - t_0|^p \cdot ||X_1 - X_0||_\infty,$$
pour un certain $p \in \mathbb{N}$.
Hérédité.
Pour tout $t \in [a\,;b]$, $X_{p+2}(t) - X_{p+1}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^t A(u)\big(X_{p+1}(u) - X_p(u)\big)\mathrm{d}u$,
d'où :
$$\begin{aligned} ||X_{p+2}(t) - X_{p+1}(t)|| &= \Big|\int_{t_0}^t ||A(u)\big(X_{p+1}(u) - X_p(u)||_\infty \mathrm{d}u \\ &\leqslant \Big|\int_{t_0}^t |||A(u)||| \cdot ||X_{p+1}(u) - X_p(u)||\mathrm{d}u\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_{t_0}^t M \cdot \frac{M^p}{p!}|u - t_0|^p \cdot ||X_1 - X_0||_\infty \mathrm{d}u \\ &\leqslant \frac{M^{p+1}}{p!}||X_1 - X_0||_\infty \Big|\int_{t_0}^t |u - t_0|^p \mathrm{d}u\Big|\cdot \end{aligned}$$
Or, si $t \geqslant t_0$, alors :
$$\int_{t_0}^t |u - t_0|^p \mathrm{d}u = \int_{t_0}^t (u - t_0)^p \mathrm{d}u = \Big[\frac{(u - t_0)^{p+1}}{p+1}\Big]_{t_0}^t = \frac{(t - t_0)^{p+1}}{p+1} = \frac{|t - t_0|^{p+1}}{p+1},$$

et si $t < t_0$, alors :

$$\int_{t_0}^{t} |u-t_0|^p \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} \big(-(u-t_0)\big)^p \mathrm{d}u = (-1)^p \int_{t_0}^{t} (u-t_0)^p \mathrm{d}u = (-1)^p \frac{(t-t_0)^{p+1}}{p+1}.$$

Ainsi : $\quad \left| \int_{t_0}^{t} |u-t_0|^p \mathrm{d}u \right| = \dfrac{|t-t_0|^{p+1}}{p+1}$, ce qui donne bien l'hérédité.

3. D'après 2., pour tout $t \in [a\,;b]$:

$$||X_{p+1}(t) - X_p(t)|| \leqslant \frac{M^p}{p!} |t-t_0|^p \cdot ||X_1 - X_0||_\infty \leqslant \frac{M^p (b-a)^p}{p!} \cdot ||X_1 - X_0||_\infty,$$

d'où : $\quad ||X_{p+1} - X_p||_\infty \leqslant \dfrac{\big(M(b-a)\big)^p}{p!} \cdot ||X_1 - X_0||_\infty$.

Comme la série exponentielle $\sum \dfrac{\big(M(b-a)\big)^p}{p!}$ converge, alors la série $\sum (X_{p+1} - X_p)$ converge normalement, donc uniformément sur $[a\,b]$. Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $X_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (X_{k+1} - X_k) + X_0$, alors la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$.

On note X cette limite ; puisque les fonctions X_p sont toutes continues, et puisque la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers X, alors X est continue, et $X \in E$.

Rappelons que par définition, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [a\,;b]$:

$$X_{p+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X_p(u) + B(u)\big) \mathrm{d}u.$$

Or, pour tout $u \in [a\,;b]$:

$$\begin{aligned} ||\big(A(u)X_p(u) + B(u)\big) - \big(A(u)X(u) + B(u)\big)|| &= ||A(u)\big(X_p(u) - X(u)|| \\ &\leqslant |||A(u)||| \cdot ||X_p(u) - X(u)|| \\ &\leqslant M||X_p - X||. \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$, indépendamment de u, donc la suite de fonctions $\big(u \mapsto A(u)X_p(u) + B(u)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a\,;b]$ vers la fonction $\big(u \mapsto A(u)X(u) + B(u)\big)$, donc :

$$\forall t \in [a\,;b], \quad \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X_p(u) + B(u)\big) \mathrm{d}u \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big) \mathrm{d}u.$$

4. Pour tout $t \in [a\,;b]$:

$$X(t) = \lim_{p\to+\infty} X_{p+1}(t) = \lim_{p\to+\infty} \left(X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X_p(u) + B(u)\big) \mathrm{d}u \right)$$

$$= X_0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u.$$

De plus, $X(t_0) = \lim\limits_{p\to+\infty} X_p(t_0) = X_0 + 0 = X_0$.
Comme l'application $u \mapsto A(u)X(u) + B(u)$ est continue, alors la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_{t_0}^{t} \big(A(u)X(u) + B(u)\big)\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et a pour dérivée $t \mapsto A(t)X(t) + B(t)$, donc :

$$\begin{cases} \forall t \in [a\,;b],\ \ X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \\ \text{et } X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

5. **Application.** D'après la méthode ci-dessus, la suite de fonctions $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall t \in [a\,;b],\ y_0(t) = 2 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a\,;b],\ y_{p+1}(t) = 2 + \int_{t_0}^{t} \big(1 + y_p(u)\big)\mathrm{d}u,$$

converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ qui contient 0, vers la solution de l'équation : $\begin{cases} y(0) = 0 \\ \text{et } y'(t) = 1 + y(t) \end{cases}$.
Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$y_p(t) = 2 + 3t + \frac{3}{2!}t^2 + \frac{3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{3}{p!}t^p.$$

Initialisation. Pour $p = 0$: $y_0(t) = 2$, donc la propriété est vraie au rang initial.
Hérédité. Pour tout $t \in [a\,;b]$:

$$y_{p+1}(t) = 2 + \int_{t_0}^{t} \big(1 + y_p(u)\big)\mathrm{d}u = 2 + \int_{t_0}^{t} \Big(1 + 2 + \frac{3}{2!}\,u + \cdots + \frac{3}{p!}\,u^p\Big)\mathrm{d}u$$
$$= 2 + 3 + \frac{3}{2!}t^2 + \frac{3}{3!}t^3 + \cdots + \frac{3}{(p+1)!}t^{p+1}.$$

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $t \in [a\,;b]$:

$$y_p(t) = -1 + 3\Big(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^p}{p!}\Big) \xrightarrow[p\to+\infty]{} -1 + 3e^t$$

La solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} y(0) = 2 \\ y' = 1 + y \end{cases}$
est donc la fonction $y :\ t \mapsto -1 + 3e^t$.

Commentaires sur les exercices de cette leçon

Exercice 1.– Il s'agit en fait d'une compilation de deux exercices : dans le premier, on montre qu'après recollement l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, peut être de dimension infinie.
Dans la deuxième partie de l'énoncé, on utilise un développement en série entière pour intégrer une équation différentielle linéaire du second ordre, puis on s'intéresse à la dimension de l'espace des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation, après recollement.

Exercice 2.– Un énoncé là encore formé de deux exercices, où l'on résout des équations différentielles du second ordre.
Dans le premier cas, on étudie les astymptotes éventuelles en $+\infty$ ainsi que le recollement en 0.
Dans le second, on résout l'équation homogène associée et on utilise la méthode de variation des constantes.

Exercice 3.– Dans la première partie de cet exercice, on calcule la somme d'une série entière en utilisant une équation différentielle linéaire du second ordre. On suit le schéma classique : on commence par résoudre l'équation homogène, puis on remarque une solution particulière et on conclut grâce aux conditions initiales.
Dans la seconde partie, on étudie le cas intéressant et joli d'une équation différentielle linéaire du second ordre où l'on finit par utiliser la méthode de variation des constantes.

Exercice 4.– Il s'agit dans cet exercice, d'étudier la forme des solutions de l'équation $y'' + qy = 0$, où q est une fonction continue et périodique.
On cherche notamment à savoir dans quels cas il existe une solution périodique, et on utilise entre autres, le wronskien.
Un exercice très intéressant qui pourra constituer un développement à l'oral de l'agrégation.

Exercice 5.– Dans cet exercice, on étudie les solutions d'une équation différentielle non linéaire, selon les valeurs de la condition initiale $x(0)$, avant de conclure précisément à propos des solutions maximales.

Exercice 6.– On démontre dans cet exercice le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire par des approximations successives, et on applique cette méthode dans une situation particulière.

Exercice 6.–

Chapitre XVI

Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires (Leçon 429)

Exercice (1). On considère dans $\mathbb{R}^2$, le système différentiel :

$$(\mathcal{H}) \ : \quad \begin{cases} x'(t) = t \cdot x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + t \cdot y(t), \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions réelles de la variable réelle t.

1. Résoudre le problème de Cauchy aux conditions initiales (x_0, y_0) en $t_0 = 0$.

   On pourra poser $z = x + \mathrm{i} \cdot y$.

2. Même question pour le système différentiel suivant :

$$(\mathcal{S}) \ : \quad \begin{cases} x'(t) = t \cdot x(t) - y(t) + t \cdot \cos(t) - t^3 \cdot \sin(t) \\ y'(t) = x(t) + t \cdot y(t) + t \cdot \sin(t) + t^3 \cdot \cos(t). \end{cases}$$

▶ **Corrigé.–**

1. On pose $z = x + \mathrm{i} \cdot y$, alors pour tout réel t :

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) + \mathrm{i}y'(t) = t \cdot x(t) - y(t) + \mathrm{i} \cdot \big(x(t) + t \cdot y(t)\big) \\ &= t \cdot \big(x(t) + \mathrm{i} \cdot y(t)\big) + \mathrm{i} \cdot \big(x(t) + \mathrm{i} \cdot y(t)\big) \\ &= t \cdot z(t) + \mathrm{i} \cdot z(t) = (t + \mathrm{i}) \cdot z(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad z(t) &= \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2} + \mathrm{i} \cdot t} \qquad \text{on pose } \lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta \text{ avec } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot (\alpha + \mathrm{i}\beta) \cdot \big(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t)\big) \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \Big(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t) + \mathrm{i} \cdot \big(\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)\big)\Big), \end{aligned}$$

d'où $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \cdot (t) - \beta\sin(t) \\ \alpha\sin(t) + \beta\cos(t) \end{pmatrix} = \alpha \cdot X_1(t) + \beta \cdot X_2(t)$,

avec $X_1(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$.

Enfin, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, et donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = x_0 e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + y_0 e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

2. Pour tout réel t,

$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A(t) \cdot X(t) + B(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) - t^3\sin(t) \\ t\sin(t) + t^3\cos(t) \end{pmatrix}$.

D'après 1, $M(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale pour le système homogène $(\mathcal{H})$.
On utilise la méthode de variation de la constante, soit

$$X_p(t) = M(t) \cdot \lambda(t), \quad \text{où} \quad \lambda(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ de classe } \mathcal{C}^1.$$

On a alors

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= M'(t)\lambda(t) + M(t)\lambda'(t) \\ &= A \cdot M(t)\lambda(t) + M(t)\lambda'(t) = A \cdot X(t) + M(t)\lambda'(t), \end{aligned}$$

d'où $\quad M(t)\lambda'(t) = B(t)$, puis $\lambda'(t) = \big(M(t)\big)^{-1} \cdot B(t)$, soit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{pmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t\cos(t) - t^3\sin(t) \\ t\sin(t) + t^3\cos(t) \end{pmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) & = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \\ \lambda_2'(t) & = t^3 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases}$$

On choisit $\lambda_1(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}$, et l'on a

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) = \int t^3 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t &= -t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + 2\int t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{(I.P.P.)} \\ &= -t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} = -e^{-\frac{t^2}{2}}(t^2+2). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} X_p(t) = M(t)\cdot\lambda(t) &= e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \times e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2+t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\cos(t) - (t^2+2)\sin(t) \\ -\sin(t) + (t^2+2)\cos(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{et } X(t) = X_{\mathcal{H}}(t) + X_p(t) \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \big(\alpha\cos(t) - \beta\sin(t)\big) - \cos(t) - (t^2+2)\sin(t) \\ e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \big(\alpha\sin(t) + \beta\cos(t)\big) - \sin(t) + (t^2+2)\cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Enfin, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \beta + 2 \end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + 1 \\ y_0 - 2 \end{pmatrix}$, et la solution cherchée est dès lors définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \big((x_0-1)\cos(t) - (y_0+2)\sin(t)\big) - \cos(t) - (t^2+2)\sin(t) \\ e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \big((x_0-1)\sin(t) + (y_0+2)\cos(t)\big) - \sin(t) + (t^2+2)\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice (2).

1. Résoudre le système différentiel :

$$(\mathcal{S}): \begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t) + 9x_2(t) - 9x_3(t) + e^{3t} \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - 2e^{3t} \\ x_3'(t) = 3x_1(t) + 3x_2(t) + 2e^{3t} \end{cases}.$$

2. Résoudre le système différentiel :

$$(\mathcal{S}'): \begin{cases} x''(t) = x'(t) + y'(t) - y(t) \\ y''(t) = x'(t) + y'(t) - x(t) \end{cases}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. Le système différentiel étudié se réécrit : $X'(t) = AX(t) + B(t)$, où $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -9 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Le polynôme caractéristique de la matrice A est défini par :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 9 & -9 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{C_3 \leftarrow C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 9 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 3 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 9 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 9 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = -(\lambda - 3)^3,$$

   donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $(A - 3I_3)^3 = 0$.
   On en déduit qu'en posant $N = A - 3I$, on obtient la décomposition de Dunford $A = 3I_3 + N$, donc pour tout réel t :

$$e^{t\cdot A} = e^{3tI_3 + tN} = e^{3t} \cdot e^{t\cdot N} = e^{3t} \cdot (I_3 + t \cdot N + \tfrac{t^2}{2} \cdot N^2)$$

$$= e^{3t} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \tfrac{t^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1+3t & 9t & -9t \\ 2t+3t^2 & 1+9t^2 & -9t^2 \\ 3t+3t^2 & 3t+9t^2 & 1-2t-9t^2 \end{pmatrix}.$$

   On sait que le système homogène associé $(\mathcal{H})$: $X'(t) = AX(t)$ a pour ensemble-solution $\left\{e^{t\cdot A}C\,;\; C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\right\}$.

Pour résoudre le système $(\mathcal{S})$, on applique la méthode de variation des constantes, en posant $X(t)=e^{t\cdot A}C(t)$, ce qui entraîne :

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R},\quad X'(t)&=Ae^{t\cdot A}C(t)+e^{t\cdot A}C'(t)=AX(t)+e^{t\cdot A}C'(t)\\ &\Leftrightarrow B(t)=X'(t)-AX(t)=e^{t\cdot A}C'(t),\end{aligned}$$

soit :

$$C'(t)=e^{-t\cdot A}B(t)=\begin{pmatrix}1-3t & -9t & 9t\\ -2t+3t^2 & 1+9t^2 & -9t^2\\ -3t+3t^2 & -3t+9t^2 & 1+3t-9t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+33t\\ -2-2t-33t\\ 2+9t-33t^2\end{pmatrix}$$

donc $C(t)=\begin{pmatrix}t-\frac{33}{2}t^2+c_1\\ -2t-t^2-11t^3+c_2\\ 2t+\frac{9}{2}t^2-11t^3+c_3\end{pmatrix}$, et ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$X(t)=e^{t\cdot A}C(t)=e^{3t}\cdot\begin{pmatrix}1+3t & 9t & -9t\\ 2t+3t^2 & 1+9t^2 & -9t^2\\ 3t+3t^2 & 3t+9t^2 & 1-3t-9t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t-\frac{33}{2}t^2+c_1\\ -2t-t^2-11t^3+c_2\\ 2t+\frac{9}{2}t^2-11t^3+c_3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{33}{2}t^2+(1+3c_1+9c_2-9c_3)t+c_1\\ -11t^3+(1+3c_1+9c_2-9c_3)t^2+(-2+2c_1)t+c_2\\ -11t^3+(-\frac{9}{2}+3c_1+9c_2-9c_3)t^2+(2+3c_1+3c_2-3c_3)t+c_3\end{pmatrix}.$$

2. On pose : $\begin{cases}u &= x+y\\ v &= x-y\end{cases}$, le système $(\mathcal{S}')$ est alors équivalent à :

$$\begin{cases}u''-2u'+u &= 0\\ v''+v &= 0\end{cases},$$

donc il existe a,b,c,d des réels tels que pour tout réel t :

$$\begin{cases}u(t) &= ae^t+bte^t\\ v(t) &= c\cos(t)+d\sin(t)\end{cases},$$

et donc il existe des réels $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tels que :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \begin{cases}x(t) &= \alpha e^t+\beta te^t+\gamma\cos(t)+\delta\sin(t)\\ y(t) &= \alpha e^t+\beta te^t-\gamma\cos(t)-\delta\sin(t)\end{cases}.$$

Exercice (3).
Soient les fonctions :

$$I: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{\cos(tx)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t\end{array} \quad \text{et} \quad J: \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \frac{\sin(tx)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t\end{array}.$$

1. Justifier que les fonctions I et J sont bien définies.
2. Montrer que I et J sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x :
$$\begin{cases} xI'(x) & = J'(x) - \dfrac{1}{2} I_(x) \\ \quad \text{et} & \\ xJ'(x) & = -I'(x) - \dfrac{1}{2} J(x) \end{cases}.$$
3. En déduire que pour tout réel x :
$$\begin{cases} I'(x) & = \dfrac{-x}{2(1+x^2)} I(x) - \dfrac{1}{2(1+x^2)} J(x) \\ \quad \text{et} & \\ J'(x) & = \dfrac{1}{2(1+x^2)} I(x) - \dfrac{x}{2(1+x^2)} J(x) \end{cases}.$$
4. Calculer $I(x)$ et $J(x)$ pour tout réel x.

▶ **Corrigé.–**

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $r: t \mapsto e^{-t} \cdot \dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.
   En 0 : $r(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $]0\,;1]$.
   De plus, $|t^2 \cdot r(t)| = t^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-t} \cdot |\cos(xt)| \leqslant t^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$,
   donc $r(t) = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, donc r est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
   Finalement, la fonction r est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
   De façon analogue, la fonction $s: t \mapsto e^{-t} \cdot \dfrac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
   Pour $x \neq 0$: $s(t) \underset{t \to 0^+}{\sim} x \cdot e^{-t} \cdot \sqrt{t} = \psi(t)$ avec ψ intégrable sur $]0\,;1]$,
   donc s est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
   Les fonctions I et J sont donc bien définies sur $\mathbb{R}$.

2. Soient les fonctions :

$$g:\ \mathbb{R}\times]0\,;+\infty[\ \to\ \mathbb{R} \qquad (x,t)\ \mapsto e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}} \qquad \text{et } h:\ \mathbb{R}\times]0\,;+\infty[\ \to\ \mathbb{R} \qquad (x,t)\ \mapsto e^{-t}\cdot\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}$$

Les fonctions g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$,
et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-e^{-t}\cdot\sqrt{t}\cdot\sin(xt)$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)=e^{-t}\cdot\sqrt{t}\cdot\cos(xt)$, avec pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\sqrt{t}\cdot e^{-t}$, et de même $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\sqrt{t}\cdot e^{-t}$.
On sait que la fonction $t\mapsto\sqrt{t}\cdot e^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$; donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, les fonctions I et J sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad I'(x)=-\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot\sqrt{t}\cdot\sin(xt)\mathrm{d}t \text{ et } J'(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot\sqrt{t}\cdot\cos(xt)\mathrm{d}t.$$

Ensuite, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x\cdot I'(x)&=\int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}\big(-x\sin(xt)\big)\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\sqrt{t}e^{-t}\big(-x\sin(xt)\big)\mathrm{d}t\\
&=\lim_{A\to+\infty}\Big(\Big[\sqrt{t}e^{-t}\cos(xt)\Big]_0^A-\int_0^A e^{-t}\big(-\sqrt{t}+\tfrac{1}{2\sqrt{t}}\big)\cos(xt)\mathrm{d}t\Big)\quad\text{(I.P.P.)}\\
&=\lim_{A\to+\infty}\Big(\sqrt{A}e^{-A}\cos(Ax)+\int_0^A e^{-t}\sqrt{t}\cos(xt)\mathrm{d}t\\
&\qquad\qquad-\tfrac12\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\Big)\\
&=0+\int_0^{+\infty}e^{-t}\sqrt{t}\cos(xt)\mathrm{d}t-\tfrac12\int_0^{+\infty}e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\\
&=J'(x)-\tfrac12 I(x).
\end{aligned}$$

On obtient de même : $\forall x\in\mathbb{R},\ x\cdot J'(x)=-I'(x)-\frac12 J(x)$, d'où

$$x^2\cdot I'(x)=x\cdot J'(x)-\frac12 J(x)=-I'(x)-\frac12 J(x)-\frac12 xI(x),$$

et $\quad 2(1+x^2)I'(x)=-J(x)-xI(x)\quad(1)$.
De même,

$$x^2J'(x)=-xI'(x)-\tfrac12 xJ(x))-J'(x)+\tfrac12 I(x)-\tfrac12 xJ(x),$$

d'où $\quad 2(1+x^2)J'(x)=I(x)-xJ(x)\quad(2)$.

3. Les relations (1) et (2) donnent bien le système :

$$\begin{cases} I'(x) & = \dfrac{-x}{2(1+x^2)} I(x) - \dfrac{1}{2(1+x^2)} J(x) \\ \quad \text{et} & \\ J'(x) & = \dfrac{1}{2(1+x^2)} I(x) - \dfrac{x}{2(1+x^2)} J(x) \end{cases}.$$

4. On pose $Z = I + \mathrm{i} \cdot J$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Z'(x) = I'(x) + \mathrm{i} \cdot J'(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)} \cdot Z(x) + \frac{\mathrm{i}}{2(1+x^2)} \cdot Z(x)$$

$$\Leftrightarrow Z'(x) = \frac{-x+\mathrm{i}}{2(1+x^2)} \cdot Z(x) \cdot$$

D'où : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ Z(x) = Z(0) \cdot \exp\Big(\displaystyle\int_0^x \frac{-t+\mathrm{i}}{2(1+t^2)} \mathrm{d}t \Big).$

Or :

$$\begin{aligned} Z(0) = I(0) + \mathrm{i} \cdot J(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u \quad \text{avec le changement de variable } t = u^2 \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{d'après la valeur connue de } \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Z(x) &= \sqrt{\pi} \cdot \exp\Big(\int_0^x \frac{-t+\mathrm{i}}{2(1+t^2)} \mathrm{d}t \Big) \\ &= \sqrt{\pi} \cdot \exp\big(-\tfrac{1}{4} \ln(1+x^2) + \mathrm{i} \cdot \tfrac{1}{2} \arctan(x) \big) \\ &= \sqrt{\pi} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot \Big(\cos\big(\tfrac{1}{2} \arctan(x)\big) + \mathrm{i} \cdot \sin\big(\tfrac{1}{2} \arctan(x)\big) \Big) \end{aligned}$$

On note $\theta = \frac{1}{2} \arctan(x)$, alors $2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta) = \cos\big(\arctan(x)\big)$,
et on a : $\cos^2(2\theta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(2\theta)} = \dfrac{1}{1+\tan\big(\arctan(x)\big)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}.$
Comme $2\theta = \arctan(x) \in]-\pi/2\,;\pi/2[$, alors $\cos(2\theta) > 0$,
d'où $\cos(2\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2\cos^2(\theta) - 1$, puis

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2\theta)\big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Big) = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}.$$

On a aussi : $\theta = \frac{1}{2}\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$, donc $\cos(\theta) > 0$ et :

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2}}.$$

On a enfin : $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\theta)\big) = \frac{1}{2}\big(1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\big) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}$,

puis : $\sin(\theta) = \varepsilon \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}$ avec $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$I(x) + \mathrm{i} \cdot J(x) = Z(x) = \sqrt{\pi} \cdot \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}} + \mathrm{i} \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}} \right),$$

soit

$$I(x) = \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}} \text{ et } J(x) = \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}} \text{ avec } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Exercice (4). Particule dans un champ magnétique

Soient $p,\ q,\ r$ trois nombres réels, et soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose que $(q, r) \neq (0, 0)$.

1. Montrer que A est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$ avec $k = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$.
2. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

▶ **Corrigé.**–

1. La matrice A est antisymétrique réelle, donc A^2 est symétrique réelle, en effet :

$$^{\mathrm{t}}(A^2) = {}^{\mathrm{t}}(AA) = {}^{\mathrm{t}}A\, {}^{\mathrm{t}}A = ({}^{\mathrm{t}}A)^2 = (-A)^2 = A^2.$$

Le théorème spectral assure alors que la matrice A^2 est diagonalisable.

Avec $k = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, on a $A^2 + k^2 \cdot I_3 = \begin{pmatrix} p^2 & pq & pr \\ pq & q^2 & qr \\ pr & qr & r^2 \end{pmatrix}$: on voit facilement que cette matrice est de rang 1, donc non inversible, ce qui prouve que $-k^2$ est une valeur propre de A^2.

Comme A^2 est diagonalisable, alors l'ordre de multiplicité de la valeur propre $-k^2$ est égal à :

$$\dim \mathrm{Ker}(A^2 + k^2 \cdot I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A^2 + k^2 \cdot I_3) = 3 - 1 = 2.$$

La troisième valeur propre λ de A^2 est obtenue grâce à sa trace ; on sait que

$$\lambda + 2(-k^2) = \mathrm{tr}(A^2) \ \Leftrightarrow\ \lambda - 2k^2 = -2k^2 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 0.$$

On en déduit que A^2 n'est pas inversible, donc A non plus et $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$. Or A n'est ni nulle ni de rang 1, donc $\mathrm{rg}(A) = 2$ et le sous-espace propre de A pour la valeur propre 0, noté $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension 1.

On remarque facilement que $e_1 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$, donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(e_1)$, et l'on a aussi $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Vect}(e_1)$ (puisque $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^2)$, avec $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A^2) = 1$).

Puisque A^2 est symétrique réelle, alors $\mathrm{Ker}(A^2 + k^2 \cdot I_3)$ le sous-espace propre pour la valeur propre $-k^2$, est orthogonal à $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$.

Enfin, puisque $\dim \operatorname{Ker}(A^2 + k^2 \cdot I_3) = 2 = \dim \big(\operatorname{Ker}(A)\big)^{\perp}$,
alors $\operatorname{Ker}(A^2 + k^2 \cdot I_3) = (e_1)^{\perp}$.
En remarquant que $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ -q \end{pmatrix}$ est orthogonal à e_1, on en déduit que e_2 est vecteur propre de A^2 pour la valeur propre $-k^2$.
Posons alors $e_3 = \frac{1}{k} \cdot Ae_2$; puisque A est antisymétrique :

$$\begin{aligned} \langle e_3\,, e_1\rangle &= \tfrac{1}{k}\langle Ae_2\,, e_1\rangle = -\tfrac{1}{k}\langle e_2\,, Ae_1\rangle = -\tfrac{1}{k}\langle e_2\,, 0\rangle = 0 \\ \text{et } \langle e_3\,, e_2\rangle &= \tfrac{1}{k}\langle Ae_2\,, e_2\rangle = -\tfrac{1}{k}\langle e_2\,, Ae_2\rangle = -\langle e_2\,, e_3\rangle \\ \text{donc } \langle e_3\,, e_2\rangle &= 0. \end{aligned}$$

De plus : $Ae_3 = \frac{1}{k}A^2e_2 = \frac{1}{k}(-k^2e_2) = -ke_2 \neq 0$, donc $e_3 \neq 0$,
et $Ae_2 = A\big(-\frac{1}{k} \cdot Ae_3\big) = -\frac{1}{k} \cdot A^2e_3 = -\frac{1}{k} \cdot Ae_2 = -\frac{1}{k}(-k^2e_2) = ke_2$.
On déduit de ce qui précède, que (e_1, e_2, e_3) est une base orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$Ae_1 = 0; \quad Ae_2 = -ke_3; \quad Ae_3 = ke_2,$$

donc en posant $Q = \dfrac{1}{k} \cdot \begin{pmatrix} pk & 0 & -r^2 - q^2 \\ qk & rk & pq \\ rk & -qk & pr \end{pmatrix}$, on a :

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix} = B.$$

2. D'après 1., on a : $X' = AX = QBQ^{-1}X \Leftrightarrow Q^{-1}X' = BQ^{-1}X$, ce qui ramène le problème à la résolution de $Y' = Q^{-1}Y$ si on pose $Y = Q^{-1}X$.
En notant $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, le système différentiel s'écrit :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' &= 0 \\ y_2' &= -ky_3 \\ y_3' &= ky_2 \end{cases}.$$

On en déduit que y_1 est constante ; ensuite, puisque $y_2' = -ky_3$ et $y_3' = ky_2$, alors $y_2'' = -ky_3' = -k^2y_2$, donc il existe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels tels que, pour tout réel t :

$$\begin{aligned} &y_1(t) = \lambda_1 \\ &y_2(t) = \lambda_2 \cdot \cos(kt) + \lambda_3 \cdot \sin(kt), \quad \text{donc} \\ &y_3(t) = -\tfrac{1}{k}y_2'(t) = -\tfrac{1}{k}\big(-\lambda_2 \cdot k\sin(kt) + \lambda_3 \cdot k\cos(kt)\big) \end{aligned}$$

$$= \lambda_2 \cdot \sin(kt) - \lambda_3 \cdot \cos(kt).$$

On conclut donc que pour tout réel t :

$$X(t) = QY(t) = \frac{1}{k} \cdot \begin{pmatrix} pk & 0 & -r^2 - a^2 \\ qk & rk & pq \\ rk & -qk & pr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \cdot \cos(kt) + \lambda_3 \cdot \sin(kt) \\ \lambda_2 \cdot \sin(kt) - \lambda_3 \cdot \cos(kt) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{k} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 pk - (r^2 + q^2)\big(\lambda_2 \cdot \sin(kt) - \lambda_3 \cdot \cos(kt)\big) \\ \lambda_1 qk + (rk\lambda_2 - pq\lambda_3) \cdot \cos(kt) + (rk\lambda_3 + pq\lambda_2) \cdot \sin(kt) \\ \lambda_1 rk - (qk\lambda_2 + pr\lambda_3) \cdot \cos(kt) + (pr\lambda_2 - qk\lambda_3) \cdot \sin(kt) \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels.

Exercice (5)

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable, et soient $\lambda_1, \ldots ; \lambda_r$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.
   a) Déterminer un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $r-1$ tel que :
   $$\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}, \quad Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i}.$$
   b) En déduire que $\exp(A) = Q(A)$.
2. a) Résoudre le système différentiel :
   $$(\mathcal{H}): \quad X'(t) = AX(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & & & & \\ & a & & (b) & \\ & & \ddots & & \\ & (b) & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix},$$
   avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
   b) Résoudre le système différentiel :
   $$X'(t) = AX(t) + B(t) \quad \text{où } B(t) = nbe^{t(b-a)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. a) Le polynôme cherché est obtenu grâce aux polynômes d'interpolation de Lagrange :
   $$Q = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k} \cdot L_k \text{ où } L_k = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ i \neq k}} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}.$$
   En effet, on sait que pour tous entiers $k, i \in \{1, 2, \ldots, r\}$:
   $L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$, donc $Q(\lambda_i) = \sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} \cdot L_k(\lambda_i) = e^{\lambda_i} \cdot 1 = e^{\lambda_i}$.

   b) Puisque A est supposée diagonalisable, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$,

et où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (pas forcément distinctes). On a alors :

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(PDP^{-1})^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{PD^nP^{-1}}{n!} = P\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!}\Big)P^{-1} \\
&= Pe^DP^{-1} = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \vdots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P\begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & & \\ & Q(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1}.
\end{aligned}$$

En notant explicitement $Q = \sum_{i=0}^{N} b_i X^i$ avec $(b_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ les coefficients de Q, on peut alors poursuivre le calcul :

$$\begin{aligned}
\exp(A) &= P\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{N} b_i\lambda_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum\limits_{i=0}^{N} b_i\lambda_n^i \end{pmatrix} P^{-1} \\
&= P\times\left(\sum_{i=0}^{N} b_i \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^i \end{pmatrix}\right)\times P^{-1} \\
&= P\times Q(D)\times P^{-1} = P\Big(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot D^i\Big)P^{-1} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot PD^iP^{-1} = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot (PDP^{-1})^i \\
&= \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot A^i = Q(A).
\end{aligned}$$

2. a) On remarque que : $A - (a-b)\cdot I_n = b \cdot J_n$ où J_n est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ($n \geqslant 2$).

On sait que : $\mathrm{rg}(J_n)=1$, donc $\dim\mathrm{Ker}\big(A-(a-b)\cdot I_n\big)=n-1$, ce qui prouve que $a-b$ est valeur propre de A, de multiplicité $n-1$. La dernière valeur propre λ vérifie : $\lambda+(n-1)(a-b)=\mathrm{tr}(A)$, soit : $\lambda+(n-1)(a-b)=na \Leftrightarrow \lambda=a+(n-1)b$, valeur propre simple de A.
La matrice A admet donc exactement deux valeurs propres :$(a-b)$ de multiplicité $(n-1$, et $a+(n-1)b$ de multiplicité 1. Il existe donc $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A=PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D=\begin{pmatrix} a-b & & & & \\ & a-b & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a-b & \\ & & & & a+(n-1)b \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout réel non nul t, la matrice $t\cdot A$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $t(a-b)$ et $t\big(a+(n-1)b\big)$. En notant $\lambda_1=a-b$ et $\lambda_2=a+(n-1)b$, on a alors d'après 1.b) :

$$\begin{aligned} e^{t\cdot A} &= Q(t\cdot A) \quad \text{où } Q=e^{t\lambda_1}\cdot\frac{X-t\lambda_2}{t\lambda_1-t\lambda_2}+e^{t\lambda_2}\cdot\frac{X-t\lambda_1}{t\lambda_2-t\lambda_1} \\ &= e^{t\lambda_1}\cdot\frac{t\cdot A-t\lambda_2\cdot I_n}{t(\lambda_1-\lambda_2)}+e^{t\lambda_2}\cdot\frac{t\cdot A-t\lambda_1\cdot I_n}{t(\lambda_2-\lambda_1)} \\ &= e^{t\lambda_1}\cdot\frac{A-\lambda_2\cdot I_n}{\lambda_1-\lambda_2}+e^{t\lambda_2}\cdot\frac{A-\lambda_1\cdot I_n}{\lambda_2-\lambda_1}. \end{aligned}$$

Or, $A-\lambda_1\cdot I_n=A-(a-b)\cdot I_n=b\cdot J_n$, et

$$A-\lambda_2\cdot I_n=A-\big(a+(n-1)b\big)\cdot I_n=\begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}=J_n-n\cdot I_n.$$

Comme de plus, $\lambda_2-\lambda_1=nb$, alors

$$e^{t\cdot A}=-\frac{1}{n}e^{t\lambda_1}\cdot(J_n-n\cdot I_n)+\frac{1}{n}e^{t\lambda_2}\cdot J_n.$$

On applique alors la méthode de variation de la constante, en posant $X(t)=e^{t\cdot A}\times C(t)$, où $C(t)=\begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$.

On a alors : $C'(t) = e^{-t\cdot A}\times B(t)$. Donc,

$$C'(t) = \left(\frac{-1}{n}e^{t\lambda_1}\cdot(J_n - n\cdot I_n) + \frac{1}{n}e^{t\lambda_2}\cdot J_n\right)\times nbe^{-t\lambda_1}\cdot J_n\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{-b\,(J_n - n\cdot I_n)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}_{=0} + be^{t(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot J\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = be^{tnb}\cdot n\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}.$$

On choisit $C(t) = e^{tnb}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, et alors :

$X_p(t) = e^{t\cdot A}\times e^{tnb}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, et $X(t) = X_{\mathcal{H}}(t) + X_p(t) = e^{t\cdot A}\left(C + e^{tnb}\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$,

avec $C = \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$.

Exercice (6). Stabilité d'un système différentiel à coefficients constants. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit E l'espace des solutions réelles du système différentiel

$$(S) \quad : \quad X' = AX.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'algèbre

$$\begin{array}{rccl} ||\cdot|| \; : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & M = (x_{i,j}) & \mapsto & n \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} |x_{i,j}|. \end{array}$$

Soit $A = B + N$ la décomposition de Dunford de la matrice A.

1. a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $||e^{t\cdot B}|| \leqslant C \cdot \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |e^{t\lambda}|$ (où $\mathrm{Sp}(A)$ désigne le spectre de la matrice A).
   En déduire que si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ pour toute valeur propre λ de A, alors $||e^{t\cdot A}|| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, puis que $X(t) \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$ pour tout X de E.
   b) Montrer la réciproque de a) : si $X(t) \xrightarrow[t\to +\infty]{} 0$ pour tout élément X de E, alors $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
2. a) On suppose que X est bornée pour tout X de E ; soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
   Montrer que $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$ et que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :
   $$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I) \neq \dim \mathrm{Ker}\big((A-\lambda \cdot I)^k\big) \text{ et } \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I) \geqslant 2,$$
   alors $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

   Indication.– Montrer que dans ces conditions, il existe
   $$X \in \mathrm{Ker}\big((A - \lambda \cdot I)^2\big) \setminus \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I),$$
   et montrer que l'on a $\forall k \in \mathbb{N}^*, \; A^k X = \lambda^k \cdot X + k\lambda^{k-1} \cdot Y$*,*
   avec $Y = (A - \lambda \cdot I)X$.

   b) Montrer la réciproque de a).

▶ **Corrigé.–**

1. a) La matrice B est diagonalisable, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}BP$ soit diagonale, et alors :

$$e^{t\cdot B} = e^{P(t\cdot D)P^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \big(P(t \cdot D)P^{-1}\big)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot P(t\cdot D)^k P^{-1}$$

$$= P\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot D)^k\Big) P^{-1} = P e^{t \cdot D} P^{-1},$$

d'où :

$$||e^{t \cdot B}|| = ||P e^{t \cdot D} P^{-1}|| \leqslant ||P|| \cdot ||e^{t \cdot D}|| \cdot ||P||^{-1} \leqslant \underbrace{||P|| \cdot ||P^{-1}|| \cdot n}_{=C} \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} |e^{t\lambda}|.$$

Or $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(A)$, donc : $\quad ||e^{t \cdot B}|| \leqslant C \cdot \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |e^{t\lambda}|$.

D'autre part : $\quad e^{t \cdot A} = e^{t \cdot B + t \cdot N} = e^{t \cdot B} e^{t \cdot N}$ car B et N commutent,

et $e^{t \cdot N} = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot N)^k$, où r est l'indice de nilpotence de N.

Alors pour $t \geqslant 0$: $\quad ||e^{t \cdot N}|| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \frac{||N||^k}{k!} t^k$.

Soit aussi λ_0 tel que $|e^{t\lambda_0}| = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |e^{t\lambda}|$, alors :

$||e^{t \cdot A}|| = ||e^{t \cdot B + t \cdot N}|| = ||e^{t \cdot B} e^{t \cdot N}|| \quad$ car B et N commutent, donc pour $t \geqslant 0$,

$$\leqslant ||e^{t \cdot B}|| \cdot ||e^{t \cdot N}|| \leqslant C |e^{t\lambda_0}| \cdot \Big(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{||N||^k}{k!} t^k\Big)$$

$$\leqslant C e^{t \mathrm{Re}(\lambda_0)} \cdot \Big(\sum_{k=0}^{r-1} \frac{||N||^k}{k!} t^k\Big) = C \cdot \sum_{k=0}^{r-1} \frac{||N||^k}{k!} t^k e^{t \mathrm{Re}(\lambda_0)},$$

qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ puisque $\mathrm{Re}(\lambda_0) < 0$.
Einfi, si $X \in E$ alors : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = e^{t \cdot A} X(0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

b) Soit λ une valeur propre (complexe) de A et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

On a : $\quad e^{t \cdot A} X_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k X_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \lambda^k}{k!} X_0 = e^{t\lambda} X_0$.

Soit $X : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{t \cdot A} X_0 \end{array}$, alors : $\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = A e^{t \cdot A} X_0 = A X(t)$;

en notant $X_1(t) = \mathrm{Re}\big(X_(t)\big)$ et $X_2(t) = \mathrm{Im}\big(X(t)\big)$, on a :

$$X_1'(t) + \mathrm{i} X_2(t) = A\big(X_1(t) + \mathrm{i} X_2(t)\big) \text{ donc } \begin{cases} X_1'(t) = A X_1(t) \\ \text{et} \\ X_2'(t) = A X_2(t) \end{cases} \quad \text{car } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

donc X_1 et X_2 appartiennent à E.
On a donc $\lim\limits_{t \to +\infty} X_1(t) = 0 = \lim\limits_{t \to +\infty} X_2(t)$, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} X(t) = 0$,

donc : $e^{t\lambda}X_0 = e^{t\cdot A}X_0 = X(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

2. a) Soit λ une valeur propre (complexe) de A et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. On sait que $X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t \mapsto e^{t\cdot A}X_0 \end{array}$ est une solution du système (S) et que (voir 1.b)) $X_1 = \mathrm{Re}(X)$ et $X_2 = \mathrm{Im}(X)$ appartiennent à E, donc X_1 et X_2, puis $X = X_1 + \mathrm{i}X_2$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
Or : $X(t) = e^{t\cdot A}X_0 = e^{t\lambda}X_0$ (voir 1.b)) ; comme $X_0 \neq 0$ et puisque X est bornée sur $\mathbb{R}_+$, alors $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$.

Considérons maintenant $F_k = \mathrm{Ker}\big((A - \lambda\cdot I)^k\big)$: il est clair que la suite $\big(\dim(F_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée de $\mathbb{N}$, donc elle est stationnaire.
Notons $r = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } F_k = F_{k+1}\}$, alors :
si $X \in F_{r+2}$, alors $(A-\lambda\cdot I)^{r+1}(A-\lambda\cdot I)X = (A-\lambda\cdot I)^{r+2}X = 0$,
donc $(A-\lambda\cdot I)X \in F_{r+1} = F_r$,
donc $(A-\lambda\cdot I)^r(A-\lambda\cdot I)X = 0 \Leftrightarrow (A-\lambda\cdot I)^{r+1}X = 0$,

donc $X \in F_{r+1}$.
Ainsi $F_{r+2} = F_{r+1}$, et de proche en proche, on aura :

$$F_r = F_{r+1} = F_{r+2} = \dots$$

Donc : si $F_1 = F_2$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k = F_1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite.
Ainsi $F_1 \neq F_2$, donc il existe $X \in F_2 \setminus F_1$. Si on pose $Y = (A-\lambda\cdot I)X$, alors $AX = \lambda\cdot X + Y$, et :

$$(A-\lambda\cdot I)Y = (A-\lambda\cdot I)^2X = 0 \Leftrightarrow AY = \lambda\cdot Y.$$

Une récurrence facile donne alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^kX = \lambda^k\cdot X + k\lambda^{k-1}\cdot Y$, d'où :

$$\begin{aligned} e^{t\cdot A}X &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\cdot(t\cdot A)^kX = X + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot A^kX \\ &= X + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot(\lambda^k\cdot X + k\lambda^{k-1}\cdot Y) \\ &= X + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(t\lambda)^k}{k!}\cdot X + t\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(t\lambda)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot Y \\ &= e^{t\lambda}X + te^{t\lambda}\cdot Y. \end{aligned}$$

Si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \mathrm{i}\beta$, et alors :

$$e^{t \cdot A} X = e^{\mathrm{i}t\beta} \cdot (t \cdot Y + X),$$

puis $||e^{t \cdot A} X|| = ||t \cdot Y + X|| \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ car $Y \neq 0$.

Par conséquent, la solution $t \mapsto e^{t \cdot A} X$ du système (S) est non bornée, ce qui est absurde. On en déduit que $\lambda < 0$.

b) On sait que $\mathbb{C}^n = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant r} E_{\lambda_i}$ où $F_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}\big((A - \lambda_i \cdot I)^{\beta_i}\big)$ est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.

Par conséquent :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \exists ! (X_1, \ldots, X_r) \in F_1 \times \cdots \times F_r \text{ tel que } X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- **Premier cas : si $\beta_i = 1$.** Dans ce cas :

$$e^{t \cdot A} X_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k X_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot \lambda_i^k X_i = e^{t\lambda_i} \cdot X_i,$$

et comme $\mathrm{Re}(\lambda_i) \leqslant 0$, alors la fonction $t \mapsto e^{t \cdot A} X_i = e^{t\lambda_i} X_i$ (de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$), est bornée.

- **Deuxième cas : si $\beta_i \geqslant 2$.**

Dans ce cas, $e^{t \cdot A} X_i = e^{t\lambda_i \cdot I + t(A - \lambda_i \cdot I)} X_i = e^{t\lambda_i} e^{t \cdot (A - \lambda_i \cdot I)} X_i$.

Or $X_i \in \mathrm{Ker}\big((A - \lambda_i \cdot I)^{\beta_i}\big)$, d'où :

$$e^{t \cdot (A - \lambda_i \cdot I)} X_i = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot (A - \lambda_i \cdot I)^k X_i = \sum_{k=0}^{\beta_i - 1} (A - \lambda_i \cdot I)^k X_i,$$

puis :

$$||e^{t \cdot A} X_i|| = e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)} ||e^{t \cdot (A - \lambda_i \cdot I)} X_i|| \leqslant e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)} \sum_{k=0}^{\beta_i - 1} ||(A - \lambda_i \cdot I)^k X_i||,$$

qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ puisque $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$.

Comme $e^{t \cdot A} X = e^{t \cdot A} \Big(\sum\limits_{i=1}^{r} X_i \Big) = \sum\limits_{i=1}^{r} e^{t \cdot A} X_i$, alors $t \mapsto e^{t \cdot A} X$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et toutes les solutions de (S) sont donc bornées.

Commentaires sur les exercices de cette leçon

Exercice 1.– Un énoncé abordable qui reprend quelques méthodes à connaître.
Pour résoudre le premier système différentiel, on passe par les complexes car la matrice du système est de la forme $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$, et pour le second on utilise la méthode de variations des constantes.

Exercice 2.– Ici, la matrice du système possède une unique valeur propre (dans $\mathbb{C}$) ; on se ramène à une décomposition de Dunford immédiate et l'on utilise la méthode de variation des constantes pour finir la résolution.

Exercice 3.– La résolution du système différentiel auquel on se ramène dans cet exercice permet le calcul de deux intégrales impropres. La matrice du système est du même type que dans l'exercice 1, on passe à nouveau aux complexes pour résoudre le problème. Voir l'exercice 5 de la leçon 429 pour un autre mode de calcul.

Exercice 4.– Un exercice original où l'on résout un problème de physique ; la matrice du système est antisymétrique et on cherche les valeurs propres de son carré dans un premier temps ; on en déduit un changement de base permet de se ramener à un système plus simple à résoudre.

Exercice 5.– L'exponentielle d'une matrice carrée A est toujours un polynôme en A ; dans le cas où A est diagonalisable, on peut déterminer ce polynôme en utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange ; on donne ici une application de ce résultat à la résolution d'un système différentiel linéaire homogène.
La dernière question examine le cas d'un système linéaire avec second membre.

Exercice 6.– On montre dans cet exercice, que les solutions $t \mapsto X(t)$ du système $X' = AX$ (où A est une matrice carrée à coefficients constants) tendent vers 0 quand t tend vers $+\infty$ si, et seulement si les valeurs propres de A ont toutes des parties réelles strictement négatives. On montre ensuite que les solutions sont bornées si, et seulement si ces parties réelles des valeurs propres sont négatives ou nulles.