Université Grenoble alpes **année 2022-2023**

agrégation interne de Mathématiques

analyse - Suites et séries de fonctions

1. Suites de fonctions. Convergence simple - Convergence uniforme

Rappels. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications définies sur un ensemble E non vide, à valeurs dans un espace de normé $(F, \|\cdot\|)$.

- On dit que f_n converge simplement sur E si pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

- On dit que f_n converge uniformément sur E s'il existe une application $f : E \to F$ telle que $\sup_{x\in E} \|f_n(x) - f(x)\| \to_{n\to+\infty} 0$.

- La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Si certaines propriétés sont stables par passage à la limite lorsque celle-ci est uniforme (continuité, dérivabilité, convergence des intégrales, voir les exercices 1, 13 et 17), ces mêmes propriétés ne sont généralement pas conservées lors du passage à la limite simple ; il sera intéressant de trouver des contre-exemples dans le cas des limites simples.

Quelques questions de rappel

Soient $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
1. On suppose que la suite $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.
(a) Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi croissante sur $\mathbb{R}$?
(b) Si les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$?
(c) Si les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi continue sur $\mathbb{R}$?
(d) Si les f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose que la suite $(f_n)_n$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ vers f.
a. Si les f_n sont croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi croissante sur $\mathbb{R}$?
(b) Si les f_n sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi strictement croissante sur $\mathbb{R}$?
(c) Si les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi continue sur $\mathbb{R}$?
(d) Si les f_n sont bornées sur $\mathbb{R}$, f est-elle aussi bornée sur $\mathbb{R}$?

Exercice.
I. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = nx^n(1-x)$.
1. Etudier la convergence simple des deux suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ sur $[0;1]$.
2. La suite $(f_n)_n$ est-elle uniformément convergente sur $[0;1]$?
3. La suite $(g_n)_n$ est-elle uniformément convergente sur $[0;1]$?

II. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que, pour tout $k \geq 0$, on a : $\int_a^b f(t)t^k dt = 0$. Démontrer que f est la fonction nulle.

III. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(x^n)}{x^n}\dfrac{1}{1+x^2}$.
1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. La convergence peut-elle être uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$?
3. Justifier la convergence des intégrales impropres $I_n := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^n)}{x^n}\frac{dx}{1+x^2}$.
4. Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et préciser sa limite.

IV. On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}}dt$.
1. Justifier la convergence des intégrales impropres.
2. Par convergence dominée déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$.
3. Montrer que $a_n - l = -\dfrac{\log(n)}{\sqrt{n}}\sqrt{\pi} + \dfrac{J}{\sqrt{n}}$ où J sera donné sous la forme d'une intégrale.

V. 1. Calculer $\int_a^b \sin^2(nt)dt,\ n \in \mathbb{N}$ où a et b sont 2 réels.

2. Existe-t-il un intervalle $[a;b]$ non réduit à un point sur lequel la suite de fonctions $(f_n(t) = \sin^2(nt))_n$ converge simplement vers zéro ?

3. Même question avec la suite de fonctions $(g_n(t) = sin(nt))_n$.

VI. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_{\infty,1} : f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ définit une norme sur $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Existe-t-il une suite $(P_n)_n$ de polynômes telle que : $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_{\infty,1} = 0$?

Exercice 1

1. Donner un exemple d'une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, convergeant simplement sur I mais ne convergeant pas uniformément sur I.
2. Une suite de fonctions convergeant uniformément sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ converge-t-elle uniformément sur $\overline{I}$?
3. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. a-t-on : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$?
4. Qu'en est-il si on remplace le segment $[a,b]$ par un intervalle non borné de $\mathbb{R}$?

Exercice 2 Etudier la convergence simple et uniforme des suites (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = x^n,\ x \in [0,1[$,
2. $f_n(x) = n^2xe^{-nx},\ x \in [0,+\infty[$,
3. $f_n(x) = \dfrac{x}{(x^2+n)},\ x \in \mathbb{R}$,
4. $f_n(x) = xe^{x/n},\ x\ \in [0,+\infty[$,
5. $f_n(x) = \dfrac{\sin^2(nx)}{xsin(x)}$ si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, et $f_n(x) = 0$ si $x \in n\mathbb{Z}$,
6. $f_n(x) = e^{-n|x|}\sin(nx),\ x \in \mathbb{R}$,
7. $f_n(x) = e^{-n|x|}\cos(nx),\ x \in \mathbb{R}$,
8. $f_n(x) = \min\left(n, 1/\sqrt{x}\right),\ x > 0$,
9. $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n$ si $x \in [0,n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

Exercice 3 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction dont la dérivée f' est uniformément continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Montrer que la suite de fonctions de terme général $n[f(x+\frac{2}{n}) - f(x+\frac{1}{n})]$, $n \geq 1$, converge uniformément vers f' sur $[a,+\infty[$.

Exercice 4

1. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g, respectivement, sur a, alors $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg sur a.
2. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers f et g, respectivement, uniformément sur a, et que f et g sont bornées sur a, alors $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers fg uniformément sur a.
3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f : E \to \mathbb{C}^*$ uniformément sur a, et que la fonction $1/f$ est bornée sur a, alors la suite $(1/f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $1/f$ uniformément sur a.

Exercice 5 (extrait agreg. interne 2021)

On note $BC^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, qu'on munit de la norme : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. (On pourra montrer que $BC^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est complet, voir exercice 13.)

1. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ pour tout entier $n \geq 1$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{nx+i}$.
   Démontrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ qui converge uniformément. Précisez sa limite uniforme.
2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ deux suites d'éléments de $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, convergeant uniformément respectivement vers f et g. Démontrer que la suite $(f_n g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers fg.
3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $BC^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, convergeant uniformément vers f. On suppose que pour tout entier $n \geq 1$, f_n est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Théorème (Théorème de Dini) Soit $(X; d)$ un espace métrique compact. Soit $(f_n)_{n>0}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On suppose :

(i) la suite $(f_n)_{n>0}$ converge simplement vers f dans $C(X; \mathbb{R})$,

(ii) la suite $(f_n)_{n>0}$ est monotone, c'est-à-dire ou bien décroissante ou bien croissante.

alors $(f_n)_{n>0}$ converge uniformément vers f, c'est-à-dire converge vers f pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Donner un contre-exemple dans le cas où l'espace n'est pas compact.

Exercice 7 Application du théorème de Dini.
1. On définit une suite $(p_n)_{n>0}$ de fonctions $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ par $p_1(x) = 0$ pour tout $x \in [0; 1]$ et $p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x))^2$. Alors les fonctions p_n sont polynomiales et convergent uniformémement vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; 1]$.
2. Montrer que la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[0; 1]$.

Exercice 8 La fonction $x \mapsto e^{-ix}$ n'est pas limite uniforme de combinaisons linéaires (finies) de fonctions de la forme $x \mapsto e^{inx}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 Critère de Cauchy uniforme
Définition. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble, soit (f_n) une suite de fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$ et soit $a \subset E$, $a \neq \emptyset$. On dit que (f_n) est uniformément de Cauchy sur a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 / \ \forall n \geq N, \forall m \geq N, \sup_a |f_n - f_m| < \varepsilon.$$

Démontrer le critère de Cauchy uniforme : La suite (f_n) est uniformément de Cauchy sur a si et seulement si il existe $f : a \to \mathbb{C}$ telle que la suite (f_n) converge vers f uniformément sur a.

Exercice 10 Polynômes de Bernstein - Théorème d'approximation de Weierstrass
Soit f une fonction consinue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Calculer $B_n(f)$ avec
   a) pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = 1$,
   b) pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$,
   c) pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x(x-1)$.
2. a) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

   b) En déduire l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0, 1], \ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{n}{4}$.

3. Soit $\varepsilon > 0$.
   a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\|f\|_\infty}{2n\alpha^2}$.
   c) Montrer que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[0,1]$.
4. En déduire le théorème d'approximation de Weierstrass : *Toute fonction continue sur un segment* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, est limite uniforme d'une suite de polynômes sur* $[a,b]$.

Exercice 11

1. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est un polynôme.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de la convergence des polynômes P_n définis par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$?

Exercice 12 Soit (f_n) une suite de fonctions définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que :
- La suite (f_n') converge uniformément sur I vers une fonction g,
- $\exists\, x_0 \in I,\ \exists\, c \in \mathbb{R}/\ \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = c$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers la fonction f définie par

$$\forall x \in I,\ f(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

2. Que peut-on dire de la régularité de la fonction f ?

2. Espaces de Banach

Rappel : pour montrer qu'un espace est de Banach, on peut considérer une suite de Cauchy d'éléments de l'espace, construire sa limite éventuelle, vérifier que cette limite appartient à l'espace, puis que la suite de Cauchy converge vers cette limite éventuelle.

Exercice 13 Soit X un ensemble et $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$. On définit, pour $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'espace $(\mathcal{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Exercice 14 On note $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on note $\|f\|_1 := \displaystyle\int_0^1 |f(t)|dt$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
2. L'espace $\big(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\big)$ est-il complet ?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Trouver une norme sur $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$ qui en fasse un espace complet.

Exercice 15 Soit E un espace vectoriel normé, F un espace de Banach, et $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans F, muni de la norme des applications linéaires : $|||f||| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Montrer que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un espace de Banach.

Exercice 16 Convergence uniforme et limite
Soient X une partie non vide d'un espace vectoriel normé E, F un espace de Banach, $a \in X$, $f_n : X \to F$ une suite d'applications convergeant uniformément vers une application $f : X \to F$.
1. Si : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists l_n \in F/\ f_n(x) \longrightarrow_{x \to a} l_n$
alors :$(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, f admet une limite en a et :

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

2. En déduire : Soient X une partie non vide d'un espace vectoriel normé E, $a \in X$, F un espace de Banach. Si $f_n : X \to F$ est une suite d'applications continues en a et convergeant uniformément vers une application $f : X \to F$, alors f est continue en a.

3. Séries de fonctions. Convergences simple et uniforme - Convergence normale.

Exercice 17 On considère, pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
2. La série $\sum f_n$ converge-t-elle absolument sur $]0, +\infty[$?
3. La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$? Enoncer le théorème utilisé.
4. Existe-t-il $n_0 \geq 0$ et $a > 0$ tels que la série de fonctions f_n, définie pour $n \geq n_0$, converge normalement sur $[a, +\infty[$?
5. Montrer que la fonction $F : x \in]0, +\infty[\mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. Enoncer le théorème utilisé.
6. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$. Enoncer le théorème utilisé.
7. Simplifier $F(x) + F(x+1)$.
8. Montrer que pour $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}dt$.
9. Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 18 Soient $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue et $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n f(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

a) Former une condition nécessaire et suffisante sur f pour que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0;1]$.
b) Montrer que $\sum f_n$ converge unif. sur $[0;1]$ si et seulement si $f(1) = 0$ et f dérivable en 1 avec $f'(1) = 0$.

Exercice 19 Démontrer la règle d'abel uniforme : Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions définies sur un ensemble E et vérifiant :

1. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \geq 0,\ \forall x \in E,\ |\sum_{k=0}^n g_k(x)| \leq M$,
2. La série $\sum |f_n - f_{n+1}|$ converge uniformément sur E,
3. La suite (f_n) converge vers 0 uniformément sur E.

alors la série $\sum f_n g_n$ converge uniformément sur E.

Exercice 20

1. Rappeler le théorème d'intégration pour les séries de fonctions convergeant uniformément.
2. Démontrer l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{-t}dt = x.$$

3. Montrer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \ln(2)$ (on pourra considérer pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n : x \in [0, 1/2] \mapsto x^n$).

Exercice 21 Soient X un ensemble non vide, F un espace de Banach, $(f_n : X \to F)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to F$ une application. Si $\sum f_n$ converge absolument sur X, alors $\sum f_n$ converge simplement sur X.

4. Séries entières : rayon de convergence, fonctions DSE

Exercice 22 Soit $S(z) = \sum a_n z^n$ une série entière (à coefficients complexes comme toujours).

1. Rappeler la définition de son rayon de convergence r.
2. Montrer que si $|z| < r$, alors $S(z)$ converge, et que si $|z| > r$, alors $S(z)$ diverge.
3. Soit r' un réel positif tel que $S(z)$ converge si $|z| < r'$ et $S(z)$ diverge si $|z| > r'$. Montrer que $r' = r$.

Exercice 23 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence r.

1. Montrer que si $|z| < r$, alors $(a_n z^n)_n$ est une suite bornée.
2. Montrer que si $(a_n z^n)_n$ est une suite bornée, alors $|z| \leq r$.
3. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence r. Soit r' un réel positif tel que $(a_n z^n)_n$ est une suite bornée si $|z| < r'$, et non-bornée si $|z| > r'$. Montrer que $r' = r$.

Exercice 24 Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses, en donner une démonstration ou un contre-exemple.

1. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
2. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont même domaine de convergence.
3. Si la série $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors elle converge normalement sur $\mathbb{R}$.
4. Si $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence fini $r > 0$ et si $S(x)$ note sa somme, alors soit $\lim_{x\to r^-} f(x)$ existe, $\lim_{x\to r^+} f(x)$ existe.

Exercice 25

1. Démontrer le Lemme d'abel : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit $r > 0$ tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. En particulier, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D(0, r')}$ pour tout $0 < r' < r$.
2. Que peut-on dire pour $|z| = r$?

Exercice 26 Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum \frac{a^n}{1+b^n} z^n$ suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 27 Déterminer le rayon de convergence R des séries entières réelles $\displaystyle\sum a_n x^n$ suivantes, puis calculer leurs sommes sur $]-R; R[$: $a_n = n$; $a_n = n(n-1)$; $a_n = n^2$; $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$; $a_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$.

Pour chacune des séries précédentes, préciser le type de convergence (simple, uniforme, normale).

Exercice 28 Calculer le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum \frac{n!}{(n+1)\dots(2n+1)} z^n$. On précisera la méthode utilisée.

Etudier la convergence des séries numériques $\sum \frac{n!}{(n+1)\dots(2n+1)} R^n$ et $\sum \frac{n!}{(n+1)\dots(2n+1)} (-R)^n$.

Exercice 29 Soit $\sum a_n z^n$ une série de rayon de convergence $r > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

Exercice 30 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence r.

1. Soit k un entier strictement positif. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{kn}$ est égal à $\sqrt[k]{r}$.
2. Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum \frac{z^{5n}}{2^n}$ et $\sum \frac{z^{7n}}{(n^2+1)3^n}$.

Exercice 31 Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est uniformément convergente sur $[0,1]$, mais n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$. On énoncera le théorème utilisé.

Exercice 32

1. En utilisant l'identité $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout x réel, obtenir le développement de *arctan* en série entière. On précisera son rayon de convergence.
2. Utiliser le théorème d'abel pour montrer la formule de Leibniz :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Exercice 33 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note, pour $|z| < R$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

1. Montrer que pour tout $0 \leq r < R$ l'application $g : t \in \mathbb{R} \mapsto f(re^{it})$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = a_n r^n.$$

2. Démontrer le **Théorème de Liouville :** Soit f une fonction DSE sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $a, b, c > 0$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |f(z)| \leq a\,|z|^b + c.$$

   Montrer que f est un polynôme.

Exercice 34 (extrait agreg. interne 2010)

Soit $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynômes) à coefficients complexes.
Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui s'écrivent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où la série entière figurant au second membre a un rayon de convergence infini. On a immédiatement $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

1. (a) Démontrer que les a_n sont déterminés de façon unique par f et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt. \qquad (1)$$

(b) On pose $M(f,r) = \sup_{zj=r} |f(z)|$. Démontrer que :

$$\forall r > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n| \leq \frac{M(f,r)}{r^n}. \tag{2}$$

(c) Démontrer que $\mathcal{P}$ n'est pas égal à $\mathcal{E}$.

(d) Démontrer que les seules fonctions de $\mathcal{E}$ qui sont bornées sont les constantes.

(e) Démontrer :

$$f \in \mathcal{P} \iff \sum a_n z^n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{C} \text{ tout entier.}$$

2. Cette question a pour but de mettre en place quelques propriétés importantes de l'espace $\mathcal{E}$.

(a) Soit (f_k) une suite de fonctions de $\mathcal{E}$, $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n$. On suppose que (f_k) converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$. Démontrer que f appartient à $\mathcal{E}$.
Indication : on pourra commencer par démontrer que :

$$\forall R > 0,\ \exists M > 0/\ \forall (n,k) \in \mathbb{N}^2,\ |a_n^{(k)}| \leq \frac{M}{R^n}.$$

(b) Démontrer qu'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement s'il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(c) Démontrer que $\mathcal{E}$ est stable par produit, c'est-à-dire que $f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow fg \in \mathcal{E}$.

(d) Soit $f \in \mathcal{E},\ a \in \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = f(z+a)$. Montrer que $g \in \mathcal{E}$. ainsi, $\mathcal{E}$ est stable par translation.

3. Une suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ de complexes est dite un multiplicateur de $\mathcal{E}$ si, pour toute fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{E},$$

la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$ définit un élément de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire a un rayon de convergence infini.
On se propose de montrer qu'on a équivalence entre :
i) (λ_n) est un multiplicateur de $\mathcal{E}$;
ii) il existe des constantes $a, B > 0$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda_n| \leq aB^n$.

(a) Démontrer que ii) implique i).

(b) On suppose que ii) n'est pas réalisée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_j)_{j\geq 1}$ d'entiers ≥ 1 avec : $\forall j \geq 1,\ |\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$. Puis montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{E}$, de la forme $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}$, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j}$ ne soit pas infini. En déduire que ii) implique i).

4. (a) Démontrer que Δ, défini par $(\Delta f)(z) = f(z+1) - f(z)$, envoie $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

(b) Décrire le noyau $\ker \Delta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, et montrer que ce noyau est de dimension infinie. ainsi, $\Delta : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est très loin d'être injective.

5. On rappelle que pour $\rho > 0$ et f définie et continue sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ, à valeurs complexes, l'intégrale curviligne

$$I = \int_{|w|=\rho} f(w)dw$$

est par définition :

$$I = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i\rho e^{it} dt. \tag{3}$$

(a) Démontrer que $|I| \leq 2\pi\rho M(f,\rho)$.

(b) Montrer que si f appartient à $\mathcal{E}$ alors $I = 0$.

(c) Soit un élément h de $\mathcal{E}$ et un entier $k \in \mathbb{Z}$. On pose :

$$J_k(h,\rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} w^k h(w) dw.$$

Démontrer que $J_{-1}(h,\rho) = h(0)$ et $J_k(h,\rho) = 0$ pour tout $k \geq 0$.

6. (a) Montrer qu'il existe une fonction g de $\mathcal{E}$ telle que
$$w \in \mathbb{C} \Rightarrow e^w = 1 + w + w^2 g(w) \text{ avec de plus : } |g(w)| \leq e - 2 \text{ si } |w| = 1.$$
   (b) Soit $k \in \mathbb{Z}$, et
$$I_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{w^k}{e^w - 1} dw.$$
   i) Démontrer que I_k est bien définie.
   ii) Démontrer que $I_0 = 1$ et que $I_k = 0$ si $k \geq 1$.
   Indication : on pourra par exemple faire intervenir une série géométrique.

Exercice 35 Soit $R > 0$. *On dit qu'une fonction* $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$ *est développable en série entière en 0 de rayon de convergence* R *(et on dit* f *est DSE(R)) s'il existe une série entière* $\sum a_n z^n$ *de rayon de convergence* $R' \geq R$ *tel que* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *pour tout* $|x| < R$.

1. a) Soit f une fonction définie sur $]-R, R[$. Montrer que f est DSE(R) si et seulement si
$$\begin{cases} \text{f est de classe } \mathcal{C}^\infty \\ \text{et} \\ \forall x \in]-R, R[, \ \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = 0. \end{cases}$$
   b) Exprimer alors les coefficients du développement en série entière de f.
2. Donner un exemple de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il n'existe pas $R > 0$ tel que $f \in DSE(R)$.
3. a) Rappeler la définition de la fonction exp comme solution d'une équation différentielle et montrer que exp est DSE(R) pour tout $R > 0$.
   b) Montrer : $\forall z \in \mathbb{C}, \ \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 36 Montrer que l'équation différentielle $xy' + (1-2x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de zéro. Déterminer le rayon de convergence de la série.

Exercice 37 Développement en série entière de la fonction tangente.
On pose, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[, \ f(x) = \tan x$.

1. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifier par la fonction f.
2. En déduire qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ telle que $f^{(n)} = P_n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que la série de Mac-Laurin de f a un rayon de convergence R supérieur ou égal à $\pi/2$.
4. On note $a_n, \ n \in \mathbb{N}$, les coefficients du développement précédent et g la somme de la série entière $\sum a_n x^n$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,
$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$
5. En déduire que, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[, \ f(x) = g(x)$, et déterminer la valeur de R. (On pourra trouver une relation reliant g' et g.)
6. En exprimant la fonction tanh à l'aide de la fonction tan, vérifier que la fonction tanh est développable en série entière. Préciser le rayon de convergence de la série entière associée.

Exercice 38 Calculer, suivant les valeurs du paramètre réel t, le développement en série entière en zéro de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2tx + 1}.$$

On distinguera les cas $|t| < 1$ (poser alors $\theta = \arccos t$) , $|t| = 1$ et $|t| > 1$ (poser alors $\theta = argch(t)$ avec $\theta > 0$ pour $t > 1$).

Exercice 39 Soit f la fonction définie par $\arctan\left(\dfrac{x \sin a}{1 - x \cos a}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $Def(f)$ de f et montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $Def(f)$.
2. Montrer que la fonction f' vérifie

$$\forall x \in Def(f),\ f'(x) = \frac{\sin a}{x^2 - 2x \cos a + 1}.$$

3. En déduire : $\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)a)x^n$ (on pourra utiliser l'exercice précédent).
4. En déduire le développement en série entière en 0 de la fonction f.

Exercice 40 On considère le système différentiel

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1.$$

Est-il possible de trouver une solution développable en série entière ayant rayon de convergence strictement positif ?

Exercice 41 Sujet Concours Commun INP 2022 - Epreuve 1 - Partie III - Étude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

1. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle positive décroissante de limite nulle et que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. En admettant l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^{N} (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0$$

démontrer que la série $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ converge.

2. Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

3. A l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0, 2\pi[$.

4. On admet dans cette question que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}}\, dt \right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}.$$

Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

5. Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+, de :

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt.$$

6. Déterminer la limite en 0^+de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{ix} - 1}{ix}$. Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 42 Mathématiques 2 - Concours Centrale-Supélec 2015

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de valeurs de la fonction ζ en des points entiers.

1.a) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$ converge.

1.b) Montrer qu'il existe une constante réelle a telle que $H_n =_{+\infty} \ln n + a + o(1)$. En déduire que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$.

2. Soit r un entier naturel. Pour quelles valeurs de r, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

3.

3.a) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, ainsi que leur rayon de convergence.

3.b) En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

4. Pour tout couple d'entiers naturels (p, q) et pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q dt \quad \text{et} \quad I_{p,q}^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q dt.$$

4.a) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p, q).

4.b) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ \forall \varepsilon \in]0, 1[,\ I_{p,q}^{\varepsilon} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$.

4.c) En déduire que l'on a : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N}^*,\ I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

4.d) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.
5. Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.
On suppose que pour tout x dans $]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.
Montrer que $\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) dt = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$.
6.
6.a) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geq 2$,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} dt.$$

6.b) Établir que l'on a alors $S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!} \int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2} (\ln(1-t))^2}{t} dt$.
6.c) En déduire que $S_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} dt$ puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

5. Séries de Fourier.

Rappel des résultats principaux. On considère une fonction f 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$.

• Coefficients de Fourier de f :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

• Egalité de Parseval : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$.

• Théorème de Dirichlet. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. alors, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{int} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

• Théorème de Fejer. On suppose f continue sur $\mathbb{R}$. On note $S_n(f)$ la n-ième somme partielle de la série de Fourier de f, et $\sigma_n(f)$ la n-ième moyenne de Césaro de ces sommes partielles :

$$\sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1}.$$

alors $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 43

1. Quel est le sens du théorème de Fejer ?
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, 2π-périodique et soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   S'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(x_0) = l$, alors $l = f(x_0)$.
3. Que peut-on dire de la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux ?

Exercice 44 En considérant la fonction f 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = -1$ si $-\pi \leq x \leq 0$ et $f(x) = 1$ si $0 < x \leq \pi$, montrer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 45 Calculer la série de Fourier de la fonction f 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(x) = \pi - |x|$ pour tout $x \in -]\pi, \pi]$. La série converge-t-elle vers f ?

Exercice 46 On considère la fonction f 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
2. Etudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 47 Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par $f(x) = \pi - x^2$ si $x \in]0, \pi[$.
Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x+1) - f(x-1)$.

1. Déterminer les séries de Fourier de f et de g.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$.

Exercice 48 (extrait de agreg. interne 2004)

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications f de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, continues, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. (i) Soient $a = (a_n)_{n \geq 1}$ un élément de $l^2(\mathbb{R})$ et x un élément de $[0, \pi]$. Montrer que la série de terme général $\frac{a_n}{n} \sin(nx)$ converge absolument (on pourra utiliser l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ pour deux nombres réels a et b).
   (ii) On pose $\theta(a)(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin(nx)$. Montrer que l'on définit ainsi une application θ de $l^2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$.
   (iii) Montrer que θ est linéaire et injective.
   Dans toute la suite on notera H l'image de θ, et $\| \cdot \|_H$ la norme définie sur H, pour $f = \theta(a)$, par $\|f\|_H = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2}$. Vérifier que H est complet pour cette norme.
2. Établir l'inclusion $E \subset H$. (On pourra montrer que tout élément f de E est la restriction à $[0, \pi]$ d'une unique fonction $\tilde{f}$ 2π-périodique et impaire, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, et développer $\tilde{f}$ en série de Fourier).
3. Montrer que l'application qui à un couple (f, g) d'éléments de E associe le nombre

$$(f|g) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f'(t)g'(t)dt$$

   est un produit scalaire sur E. Vérifier que la norme associée à ce produit scalaire coïncide avec la restriction à E de $\| \cdot \|_H$.
   Montrer que E est dense dans H pour la topologie associée à la norme $\| \cdot \|_H$.

Exercice 49 Inégalité de Wirtinger.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$. Montrer :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

2. Quelle forme prend l'inégalité de Wirtinger si $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$ et $f(0) = f(1)$?

Exercice 50 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, périodique de période $T > 0$, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, T]$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $c_n(f') = in\omega c_n(f)$ avec $\omega = 2\pi/T$.
2. Montrer que la série de terme général $c_n(f)$ converge absolument et la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$
3. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^p$, il existe une constante M telle que l'on ait, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leq \dfrac{M}{n^p}$.
4. **Inégalité de Sobolev.** Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^2$, telle que $\int_0^1 f(t)dt = 0$ et $f(0) = f(1)$. alors :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{12}} \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$