Université Grenoble Alpes **Année 2022-2023**
UFR IM^{2}AG **Agrégation Interne Mathématiques**

Exercices "Calcul différentiel"

Cette feuille, complément du résumé de cours, propose des exercices traitant des principales notions sur les fonctions de plusieurs variables : continuité, dérivées partielles, différentiabilité, régularité, ainsi que les principaux résultats "géométriques" centraux dans la théorie : théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale, étude des extréma (liés) de fonctions de plusieurs variables. Elle comprend les exercices de l'année dernière auxquels ont été ajoutés de nouveaux exercices.

Les exercices 1 à 15 permettent de s'entrainer aux calculs de différentielles, de dérivées partielles, ... Il est important pour chacun de ces exercices de bien regarder la forme des fonctions avant de se lancer dans les calculs, voire d'essayer de deviner pour chacune des fonctions si elle est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable,... avant de lire les questions.

Les exercices 16 à 25 permettent de comprendre, sur des exemples "visuels", les notions d'inversion locale, fonctions implicites, difféomorphisme et de s'entrainer ou d'appliquer ces théorèmes dans différents contextes.

Enfin, les exercices 26 à 35 permettent, dans différents contextes, d'étudier l'existence d'extréma et éventuellement de déterminer ces extrema (conditions nécessaires d'existence d'un extremum permettant de trouver les éventuels extrema, vérification).

I. Continuité - Différentiabilité

Exercice 1. **1.** Calculer la différentielle en $(0,0,0)$ de l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y,z) = xy + z\sin(x^2+y^2).$$

Même question avec la fonction $g(x,y) = x^2+y^2$, au point $(1,0)$.

2. Calculer les dérivées partielles de la fonction g et montrer qu'elles sont continues.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ f(0,0) &= 0\,. \end{cases}$$

1. L'application f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

2. Calculez les dérivées partielles de f. Sont-elles continues ?

3. Pour tout $A : (a,b)$ et tout $H : (h,k)$ de $\mathbb{R}^2$, calculez directement $f'(A;H) = \lim_{t\to 0, t\neq 0} \frac{f(A+tH)-f(A)}{t}$. L'application $H \mapsto f'(A;H)$ est-elle linéaire en H ?

Exercice 3. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) &= \dfrac{xy}{2x^2+3y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ f(0,0) &= 0\,. \end{cases}$$

Montrez que les dérivées partielles $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$ existent pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, y compris à l'origine. La fonction f est-elle continue à l'origine ?

Exercice 4. Montrez que l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} g(x,y) & = & \dfrac{5x^3y}{2x^2+3y^2} + \dfrac{x^2|y|^{3/2}}{2x^2+3y^2} \text{ si (x, y)} \neq (0,0)\,, \\ \\ g(0,0) & = & 0 \end{cases}$$

est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5. Soit $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\} \mapsto \dfrac{xy^3}{x^4+y^2}$, $f(0,0) = 0$.

L'application f admet-elle des dérivées partielles en(0,0) ? Des dérivées directionnelles ? Est-elle continue en (0,0) ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de (0,0) ? Est-elle différentiable en (0,0) ?

Exercice 6. Déterminer sur quelle partie de $\mathbb{R}^2$ la fonction f définie par $f(x,y) = \inf(x^2, y^2)$ est continue (resp. différentiable, resp. de classe $\mathcal{C}^1$).

Exercice 7. Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur une partie U de $\mathbb{R}^2$ et vérifiant sur U :

$$(i) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \frac{-y}{x^2+y^2} \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{y}{1+y^2} \end{cases}$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(t) = f(t, f(t, f(t,t))).$$

Calculer $\varphi'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f. Traiter l'exemple $f(t,s) = ts^2$.

Exercice 9. Pour $b > 0$, on définit la fonction h_b dans le demi-plan $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ par :

$$h_b(x,y) = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{y-b}{x}\right).$$

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\arctan(x) + \arctan(1/x)$.
2. Montrer que h_b se prolonge continûment au demi-plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ privé du point $(0,b)$ et expliciter ce prolongement.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{h_b(x,0)}{x} = \frac{1}{b}$.

Exercice 10. Notons $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\varphi\| := sup_{x\in[0,1]}|\varphi(x)|$.
1. On considère la fonction F de E dans E définie par $F(\varphi) = \varphi^2$. Montrez que F est différentiable et explicitez la différentielle $dF(\varphi)$ de F au point $\varphi \in E$.
Explicitez ensuite l'application différentielle $dF : E \to E$.
2. Traitez la même question avec $F(\varphi) = f \circ \varphi$ où f est une fonction donnée de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g, h : U \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U,\ f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

On suppose de f et h sont différentiables en $x_0 \in U$ et que $f(x_0) = h(x_0)$.
1. Montrer que $df(x_0) = dh(x_0)$.
2. Montrer que g est différentiable en x_0.

Exercice 12. Soit $X = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application

$$f \in X \mapsto \int_0^1 f^3(t)dt$$

est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 13. **1.** Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\| = \sqrt{< x, x >}$ est différentiable en tout $x \neq 0$ et donner sa différentielle.
2. Montrer que cette application n'est pas différentiable en0.
3. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Donner une formule pour la dérivée de la fonction qui associe à $t \in \mathbb{R}$ la distance de 0 à $\gamma(t)$. Interpréter géométriquement l'annulation de cette dérivée.

Exercice 14. Soient X, Y des $\mathbb{R}$-espaces de Banach, $E := \mathcal{L}(X; Y)$, $U = Isom(X; Y) \subset E$ et $f : U \to F := \mathcal{L}(Y; X)$ définie par $f(u) = u^{-1}$.
Démontrer que f est différentiable et $df(u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ pour tout $(u, h) \in U \times E$.

Exercice 15. Soit E un espace de Banach. On note I_E l'application identité sur E. Soit $Q : L(E) \to L(E)$ définie par $Q(u) := u \circ u$.

1. Montrer que Q est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{L}(E)$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $v \in L(E)$ vérifiant $\|v - I_E\| < \varepsilon$, l'équation $u \circ u = v$ possède une solution dans $\mathcal{L}(E)$.
3. On suppose ici $E = \mathbb{R}^2$, et l'on considère les éléments u et h de $\mathcal{L}(E)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $dQ(u) \cdot h$. En déduire qu'il n'existe pas de fonction différentiable ψ définie sur un voisinage W de I_E et à valeurs dans un voisinage de u dans $\mathcal{L}(E)$, telle que $\psi(I_E) = u$ et $\psi(w) \circ \psi(w) = w$ pour tout $w \in W$.

II. Fonctions implicites - Inversion

Exercice 16. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) &= x + 2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0\,, \\ f(0) &= 0\,. \end{cases}$$

1. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(0) = 1$. Montrez que $df(0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrez que f n'est injective sur aucun voisinage de 0.

3. Pourquoi le théorème d'inversion locale ne s'applique-t-il pas ?

Exercice 17. On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

1. Déterminez l'image de $\mathbb{R}^2$ par f.
2. Montrez que f définit un difféomorphisme local au voisinage de tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. L'application f est-elle un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$?
4. Mêmes questions avec l'application $g : (x,y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy)$.
5. Montrer que si a et b sont voisins de 1, on peut trouver $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $y + e^{xy} = a,\ x + e^{-xy} = b$.

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq k$. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$.
1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $dF(x,y)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
3. On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (a - f(y), b - f(x))$. Montrer que g est contractante sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire qu'il existe $k' \in [0,1[$ tel que pour tous (x_1,y_1) et (x_2,y_2) dans $\mathbb{R}^2$, $\|g(x_1,y_1) - g(x_2,y_2)\| \leq k'\|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|$.
4. Déduire de ce qui précède que F est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19. **1.** Montrer que l'ensemble $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^3 + y^3 - 3xy = 1\}$ est, au voisinage de $(0,1)$, le graphe d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\varphi(0) = 1$.
2. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 20. Soit $P_0 = \sum_{k=0}^n a_k^0 X^k \in \mathbb{R}[X]$ admettant une racine simple α_0.
1. Montrer qu'il existe un voisinage U de $(a_0^0, \ldots, a_n^0)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que pour tout $(a_0, \ldots, a_n) \in U$, le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ admet une unique racine simple α.
2. Quelle est la dépendance de α par rapport à $(a_0, \ldots, a_n)$?

Exercice 21. On note $M_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients complexes.
1. On considère l'application Φ de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_n(\mathbb{C})$ définie par : $\Phi(M) = M^2$. Montrez que Φ est différentiable sur $M_n(\mathbb{C})$ et explicitez l'application différentielle $d\Phi$. Pourquoi ne précise t-on pas la norme choisie sur $M_n(\mathbb{C})$?
2. Montrer qu'il existe une fonction différentiable F, définie dans un voisinage U de la matrice I_n, telle que $F(X)^2 = X$, pour tout $X \in U$.
3. On suppose que $n = 2$. Soit $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $dF(X).J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Que peut-on en déduire ?
4. Même question avec l'application Ψ définie par $\Psi(M) = M^3$.

Exercice 22. On note S l'espace des matrices carrées symétriques $n \times n$ à coefficients réels. Etant donnée $A_0 \in S$ on appelle Φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans S définie par $\Phi(M) =^t MA_0M$.
1. Montrez que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculez $d\Phi(Id)$.
2. Déterminez le noyau et l'image de $d\Phi(Id)$.

3. On note E l'espace des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_0 M \in S$ et l'on note $\overline{\Phi}$ l'application Φ restreinte à E. Quel est le noyau et l'image de $d\overline{\Phi}$?

4. Montrez qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de A_0 dans S tel que toute matrice $A \in \mathcal{U}$ s'écrit sous la forme $A =^t MA_0M$, pour une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que l'on peut choisir M dépendant de manière $\mathcal{C}^1$ de la matrice A dans $\mathcal{U}$ (c'est-à-dire qu'il existe une application Ψ de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = \Psi(A)$, pour tout $A \in \mathcal{U}$).

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$||f(x) - f(y)|| \geq k||x - y||.$$

1. Montrer que f est injective.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$||df(x)(h)|| \geq k||h||.$$

3. En déduire que $df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

4. Montrer que f est localement inversible en tout point de $\mathbb{R}^n$, i.e. que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un ouvert U contenant x tel que f soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de U sur $f(U)$.

5. Montrer que f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.
(On pourra montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé.)

Exercice 24. On considére le cône $\mathcal{C} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x^2 + y^2 = z^2\}$.

1. Montrer qu'en tout point de $\mathcal{C}$ différent de l'origine, $\mathcal{C}$ s'écrit comme un graphe. Calculer son plan vectoriel tangent en un tel point.

2. Que se passe-t-il à l'origine ?

Exercice 25. **1.** Soit N une norme sur un espace vectoriel. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne notée $|| \cdot ||$.

2. Montrer que l'application $N_2 : x \mapsto ||x||$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et calculer sa différentielle.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ et F l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ par $F(x) = f(||x||)x$.

3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer sa différentielle.

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\langle dF(x)(h), h\rangle \geq f(||x||)||h||^2.$$

5. Montrer que F est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

III. Extrema - Extrema liés

Exercice 26. Soit $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x) = (a|x) \exp(-\|x\|^2).$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et montrer que la différentielle de f en $x \in \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\forall h \in \mathbb{R}^n, df(x)(h) = [(a|h) - 2(a|x)(x|h)] \exp(-\|x\|^2).$$

Ici $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

2. Déterminer les points critiques de f, c'est-à-dire les points x de $\mathbb{R}^n$ tels que $df(x) = 0$.

3. Déterminer les éventuels maxima et minima de f.

Exercice 27. Soit U l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par $U = (]0, +\infty[)^n$ et f l'application de U dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n + \alpha^{n+1}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

où α est un réel strictement positif fixé.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U (on calculera les dérivées partielles de f).

2. Déterminer le point critique de f et préciser sa nature (maximum, minimum, point selle).

Exercice 28. Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ on note :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Soit U une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, à valeurs réelles. On suppose que $\Delta f(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in U$.

Montrer que f ne peut pas avoir de maximum sur U (on pourra raisonner par l'absurde en considérant un point (x_0, y_0) de U où un maximum serait atteint et introduire les fonctions $f_1 : t \mapsto f(x_0 + t, y_0)$ et $f_2 : t \mapsto f(x_0, y_0 + t)$).

Exercice 29. Soit $a > 0$ et S la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ x + y + z = a, \ x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$$

La fonction $g : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xyz$ admet-elles des extrema sur S ? Si oui, les déterminer.

Exercice 30. Soit $(E, <,>)$ un espace euclidien (réel) et u un endomorphisme symétrique de E. Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère unité de E : $\mathbb{S}^n = \{x \in E / < x, x >= 1\}$.

1. Montrer que l'application $f : x \in E \longmapsto < u(x), x > \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E.

2. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x_0) = \sup\limits_{x \in \mathbb{S}^n} f(x)$.

3. En déduire que x_0 est un vecteur propre de l'endomorphisme u.

4. Montrer que u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

Exercice 31. Soit $f : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1 \cdots x_n$ et $g : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto x_1 + \cdots + x_n$.

Pour $s > 0$, on définit $K_s := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n / \ g(x) = s\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in K_s$: $f(x) \leq f(s/n, \ldots, s/n)$.

2. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\forall n \geq 1, \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^n, \ (x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 32. Soit $0 < c < b < a$. Montrer que le volume du plus grand parallélépipède rectangle qui puisse être inscrit dans l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

est $8abc/3\sqrt{3}$.

Exercice 33. Trouver le point de la courbe $y^2 = 4x$ dont la distance au point $(1, 0)$ est minimale.

Exercice 34. Déterminer les extrema locaux de la fonction $u : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \sin(x)\sin(y)\sin(z)$ lorsque $x + y + z = \pi/2$ et $x, y, z > 0$.

Exercice 35. On considère l'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 /\ x^2 - y^2 + z + 1 = 0\}$ et la fonction $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 3x^2 - y^2 + z^2$.

1. Montrer que S est une surface de $\mathbb{R}^3$ (i.e. qu'elle s'écrit comme le graphe d'une fonction différentiable).

2. Montrer que $f(x, y, z)$ tend vers $+\infty$ quand $|x| + |y| + |z|$ tend vers $+\infty$, avec $(x, y, z) \in S$.

3. En déduire que f atteint son minimum sur S.

4. Déterminer en quel(s) point(s) ce minimum est atteint.

Exercice 36. Soient a, b, c, h des réels strictement positifs. On note d la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^3$; on note $\mathcal{P}$ le plan d'equation $x + y + z - h = 0$ et $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde d'equation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0$.

3. Montrer que la distance du point $M = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\dfrac{|h - (u + v + w)|}{\sqrt{3}}$.

2. Calculer la distance entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{E}$, c'est-à-dire le minimum de la distance entre un point de $\mathcal{P}$ et un point de $\mathcal{E}$.