

Autour des nombres de Bell

Soit E un ensemble non vide.

On appelle *partition* de E tout ensemble $\mathcal{U} = \{A_1, \dots, A_k\}$ de parties de E tel que

- chaque A_i , pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ est une partie *non vide* de E ;
- les parties A_1, \dots, A_k sont *deux à deux disjointes*, c'est-à-dire que pour tous $i \neq j$ entre 1 et k , $A_i \cap A_j = \emptyset$;
- la réunion des A_i forme E tout entier : $E = \bigcup_{i=1}^k A_i$.

Si \mathcal{U} une partition de E et si k est le nombre d'éléments de \mathcal{U} , on dit aussi que \mathcal{U} est une *partition de E en k parties*.

1 Nombre de partitions en k parties

1. Soit k et n deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ en k parties.

Dans tout le problème, pour tout couple (n, k) d'entiers strictement positifs, on note $S(n, k)$ le nombre de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ en k parties.

On pose de plus $S(0, 0) = 1$ et, pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^{*2}$, $S(n, 0) = S(0, k) = 0$.

2. Exprimer $S(n, k)$ en fonction de n ou de k dans les cas suivants :
 - (a) $k > n$;
 - (b) $k = 1$.
3. Montrer que pour tous k et n entiers strictement positifs, on a

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k)$$

Indication : On pourra distinguer les partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ selon qu'elles contiennent ou non le singleton $\{n\}$.

4. Montrer que, pour $n \geq 1$, le calcul de $S(n, k)$ par cette fonction récursive nécessite au moins $\binom{n}{k}$ opérations (sommations ou produits).

2 Nombres de Bell

Dans toute la suite, on pose pour tout entier $n \geq 0$,

$$B_n = \sum_{k=0}^n S(n, k)$$

1. Montrer que pour $n \geq 1$, B_n est égal au nombre total de partitions de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

2. Démontrer la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$$

3. Montrer que la suite $\left(\frac{B_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 1.

4. En déduire une minoration du rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n$.

Pour $x \in]-R, R[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} x^n$.

5. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, $f'(x) = e^x f(x)$.

6. En déduire une expression de la fonction f sur $] - R, R[$.

3 Une suite de polynômes

On définit la suite de polynômes $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0(X) = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$H_k(X) = X(X-1) \cdots (X-k+1)$$

1. Montrer que la famille (H_0, \dots, H_n) est une base de l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, établir une expression simplifiée de $H_{k+1}(X) + kH_k(X)$.

(b) En déduire que, pour tout entier naturel n

$$X^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) H_k(X)$$

3. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la fonction $f_k : x \mapsto \sum_{n=k}^{+\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!}$ est définie sur $] - 1, 1[$.

(b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $g_k : x \mapsto \frac{(e^x - 1)^k}{k!}$.

Montrer que la fonction g_k vérifie l'équation différentielle

$$y' = \frac{(e^x - 1)^{k-1}}{(k-1)!} + ky$$

(c) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in] - 1, 1[$,

$$\frac{(e^x - 1)^k}{k!} = \sum_{n=k}^{+\infty} S(n, k) \frac{x^n}{n!}$$

4. (a) Pour $x \in]-1, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, simplifier $\sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha) \frac{x^k}{k!}$.

(b) Montrer que pour $u < \ln 2$

$$e^{u\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k(\alpha) \frac{(e^u - 1)^k}{k!}$$

4 Fonctions génératrices

On se donne dans la suite un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Soit m un entier strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ admet un moment d'ordre m fini si Y^m admet une espérance finie, c'est-à-dire si la série $\sum n^m \mathbb{P}(Y = n)$ converge. On appelle alors moment d'ordre m de Y le réel

$$E(Y^m) = \sum_{n=0}^{\infty} n^m \mathbb{P}(Y = n)$$

1. Montrer que si $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ est une variable aléatoire associée à une fonction génératrice G_Y de rayon strictement supérieur à 1, alors Y admet à tout ordre un moment fini.

2. Réciproquement, soit $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire admettant à tout ordre un moment fini.

(a) Montrer que la fonction génératrice G_Y est de classe C^∞ sur $[-1, 1]$.

(b) Exprimer $G_Y^{(k)}(1)$ à l'aide des polynômes $H_k(X)$ et de la variable Y .

(c) La fonction génératrice G_Y a-t-elle nécessairement un rayon de convergence strictement supérieur à 1 ?

Indication : On pourra utiliser la série entière $\sum e^{-\sqrt{n}} x^n$.

3. On suppose dans cette question que Y suit la loi de Poisson de paramètre 1.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = E(Y^n)$.

(b) En déduire que pour tout polynôme $Q(X)$ à coefficients entiers, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q(n)}{n!}$ est convergente et sa somme est de la forme Ne , où N est un entier.