Révisions sur le calcul intégral

Préparation à l'agrégation interne

Année 2021

Exercice 1. Intégrales de Wallis
Les intégrales de Wallis sont données par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^n d\theta, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^n d\theta$$

1. Montrer que $I_n = J_n$.
2. Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, et que la suite (I_n) est décroissante.
3. Montrer la relation de récurrence $I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}, \; I_{2n+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}.$$
5. Montrer que $I_{2n} \sim I_{2n+1} \sim I_{2n+2}$, et en déduire que
$$I_{2n}^2 \sim I_{2n}I_{2n+1} \sim \frac{\pi}{4n}.$$

Exercice 2. Formule de Stirling

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [p, p+1]$,
$$0 \leq \int_p^{p+1} \ln\left(\frac{x}{p}\right) dx \leq \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$
2. En sommant la relation précédente pour p entre 1 et $n-1$ montrer que
$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + O(\ln(n)).$$
3. Soit $u_n = \ln(n!) - n\ln(n) + n$. Donner un développement limité à l'ordre 2 de $u_{n+1} - u_n$. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que
$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(n) + C + o(1).$$
4. En utilisant l'exercice précédent (question 5) déduire la formule de Stirling :
$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}.$$

Exercice 3. Calcul de l'intégrale de Gauss
Posons $f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt = 2\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n-2}(x)dx$ et en déduire en utilisant l'exercice 2 que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$$

.

Exercice 4. Sommes de Riemann

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n}(f(1)-f(0)) + o(\frac{1}{n})$$

2. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $V_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.
   (a) Calculer la limite quand $n \to \infty$ de $U_{2n} - U_n$ en utilisant une somme de Riemann.
   (b) Rappeler pourquoi $\lim_{n\to\infty} V_n$ existe et calculer cette limite.
3. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. On pose $f(x) = \int_0^{2\pi}\ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$.
   (a) Déterminer D_f.
   (b) Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$.
   (c) Calculer $f(x)$ à l'aide de ses sommes de Riemann.

Exercice 5. Transformée de Laplace

Notons E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ continues et telles que $\int_0^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$.
Soit $f \in E$.
La transformée de Laplace de f notée $L(f)$ est l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$L(f)(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}f(x)dx$$

1. Montrer que $L(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec pour $n \geq 1$:

$$(-1)^n L(f)^{(n)}(\lambda) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-\lambda x}f(x)dx$$

2. Soit F la fonction définie par $F(t) = \int_0^t f(u)du$ si $t \geq 0$.
   Soit $a > 0$. Montrer que

$$L(f)(a) = a\int_0^{+\infty} e^{-au}F(u)du$$

3. On suppose que $L(f) = 0$.
   (a) Montrer que la fonction $]0,1] \to \mathbb{R}, u \mapsto F(-\ln u)$ est continue et prolongeable par continuité en 0.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_0^1 u^{n-1}F(-\ln u)du = 0$.
4. Montrer que l'application $f \mapsto L(f)$ est injective sur E.

Exercice 6. Convergences

Soit I un intervalle (du type $[a,b]$ ou $[a,+\infty[$ ou $]-\infty,a]$ ou $]-\infty,+\infty[$) de $\mathbb{R}$. On note E l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs réelles. On note $\mathcal{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions de E telles que $\int_I f(x)dx$ soit absolument convergente. On note $\mathcal{L}^2(I)$ l'ensemble des fonctions de E telles que $\int_I f^2(x)dx$ soit convergente.

1. Montrer que $\mathcal{L}^1(I)$ est un sous-espace vectoriel de E. On définit pour $f \in \mathcal{L}^1(I)$, $\|f\|_1 = \int_I |f(x)|dx$. Montrer que $\|\ \|_1$ est une norme sur $\mathcal{L}^1(I)$.
2. On suppose que $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Est-ce que f_n converge simplement vers f sur I ?

3. On suppose que $(f_n)_n$ est une suite de E qui converge simplement vers f. Est-ce que f_n tend vers f pour la norme $\| \ \|_1$?
4. Montrer que si $f, g \in \mathcal{L}^2(I)$, $fg \in \mathcal{L}^1(I)$. En déduire que $(f,g) \mapsto \int_I f(x)g(x)dx$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(I)$.
5. $(\mathcal{L}^2(I), \| \ \|_2)$ est-il un espace de Hilbert ?
6. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-2x} dx$.
7. Les espaces $\mathcal{L}^1(I)$ et $\mathcal{L}^2(I)$ sont-ils comparables (au sens de l'inclusion) ?
   Sur $\mathcal{L}^1(I) \cap \mathcal{L}^2(I)$, les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 7. Fonction gamma d'Euler
Livre de Gourdon

SUJET D'ÉTUDE 1 (INTÉGRALES EULÉRIENNES : FONCTION GAMMA, FONCTION BÊTA).
Le but de ce sujet d'étude est d'étudier et de donner quelques propriétés des fonctions *gamma* et *bêta* définies respectivement par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt \quad (x > 0), \qquad \mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \quad (x, y > 0).$$

1/ (Fonction gamma.) **a)** Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
b) Montrer que Γ est logarithmiquement convexe (*i. e.* que $\log \Gamma$ est convexe).
c) Montrer

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

d) Donner un équivalent de Γ en 0^+ et tracer l'allure de son graphe.

2/ (Fonction bêta.) **a)** Montrer que B vérifie les équations fonctionnelles

$$\forall x, y > 0, \qquad \mathrm{B}(x,y) = \mathrm{B}(y,x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\,\mathrm{B}(x,y).$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$. En exprimant $I_n(x)$ en fonction de la fonction B, en déduire

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

c) Montrer que pour $x, y > 0$ fixés, $\mathrm{B}(x+n+1, y) \sim \Gamma(y)/n^y$ lorsque $n \to +\infty$. En déduire la formule

$$\forall x, y > 0, \qquad \mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

d) Calculer $\Gamma(1/2)$.

3/ a) Démontrer la *formule de Weierstrass* :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n}\right],$$

où γ est la constante d'Euler (le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty}$ signifie $\lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N}$).
b) Montrer la *formule de duplication*

$$\forall x > 0, \qquad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x).$$

c) En utilisant le développement en produit infini de la fonction sinus (voir la question b) de l'exercice 2 page 262) montrer la *formule des compléments*

$$\forall x \in]0,1[, \qquad \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\sin \pi x}{\pi}.$$

d) Montrer la relation

$$\forall x > 0, \qquad \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(x+n)}.$$

En déduire $\int_0^{+\infty} (\log t) e^{-t}\,dt = -\gamma$.