19 octobre 2021

Exemples d'applications de la notion de compacité (Leçon 454)

Exercice (1). Théorème de d'Alembert-Gauss

Soit P un polynôme non constant, à coefficients réels ou complexes.

1. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \min\limits_{z\in\mathbb{C}} \big(|P(z)|\big)$.
2. Montrer que $P(z_0) = 0$.

▶ **Corrigé.–**

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$, noté :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Pour $z \in \mathbb{C}^*$:

$$|P(z)| = |a_n| \cdot |z|^n \left(1 + \tfrac{a_{n-1}}{|a_n|} \cdot \tfrac{1}{z} + \cdots + \tfrac{a_0}{|a_n|} \cdot \tfrac{1}{z^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc il existe $R > 0$ tel que si $|z| > R$, alors $|P(z)| > |P(0)|$.

Par ailleurs, la fonction $f:\ z \mapsto |P(z)|$ est continue sur $\mathbb{C}$, et comme $\overline{D}(0\,,R) = \big\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| \leqslant R\big\}$ est un compact, alors $f\big(\overline{D}(0\,,R)\big)$ est un compact de $\mathbb{R}$, et par conséquent il existe $z_0 \in \overline{D}(0\,,R)$ tel que $f(z_0) = \inf\limits_{z\in\overline{D}(0\,,R)} f(z)$, soit : $|P(z_0)| = \min\limits_{z\in\overline{D}(0\,,R)} |P(z)|$.

Comme : $|z| > R \Longrightarrow |P(z)| > |P(0)| \geqslant \min\limits_{z\in\overline{D}(0\,,R)} |P(z)| = f(z_0)$,

alors $|P(z_0)| = \min\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$.

2. D'après la formule de Taylor, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z_0 + z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k \quad \text{avec } b_k = \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} \ (0 \leqslant k \leqslant n),$$

et en particulier, $b_n = \dfrac{P^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n \neq 0 \cdot$
Soit alors $k = \min \big\{ j \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ tel que } b_j \neq 0 \big\}$.
Supposons $b_0 \neq 0$ et soit $\omega \in \mathbb{C}$ qui vérifie $w^k = \dfrac{-b_0}{b_k}$, alors pour tout $t \in [0\,;1]$:

$$\begin{aligned} P(z_0 + \omega t) &= b_0 + b_k \omega^k t^k + t^l (b_{k+1} w^{k+1} t + \cdots + b_n \omega^n t^{n-k}) \\ &= b_0 - b_0 t^k + b_0 t^k \varepsilon(t), \end{aligned}$$

où $\varepsilon(t) = \dfrac{1}{b_0}(b_{k+1}\omega^{k+1} t + \cdots + b_n \omega^n t^{n-k}) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, d'où :

$$\begin{aligned} \big|P(z_0 + \omega t)\big| &= |b_0| \cdot \big|1 - t^k + t^k \varepsilon(t)\big| \\ &\leqslant |b_0| \cdot \big(1 - t^k + t^k |\varepsilon(t)|\big) = |b_0| \cdot \Big(1 - t^k \big(1 - |\varepsilon(t)|\big)\Big). \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, alors : $\ \exists\ \alpha \in]0\,;1[\,;\ 0 < t < \alpha \Longrightarrow |\varepsilon(t)| < 1$,
et :

$$\big|f(z_0 + \omega t)\big| \leqslant |b_0| \cdot \Big(1 - t^k \big(1 - |\varepsilon(t)|\big)\Big) < |b_0| = |P(z_0)|,$$

ce qui contredit le fait que $|P(z_0)| = \min\limits_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.
On en déduit que $P(z_0) = 0$.

Exercice (2). Théorème de Dini

Soit (E,d) un espace métrique compact, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications continues définies sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

(i) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f continue sur E.

(ii) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $F_{n,\varepsilon} = \big\{x \in E \text{ tel que } f_n(x) \leqslant f(x) - \varepsilon\big\}$.

1. a) Montrer que $F_{n,\varepsilon}$ est un compact de E, et que la suite $(F_{n,\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.

   b) Montrer que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \varnothing$ et en déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_0,\varepsilon} = \varnothing$.

   c) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur E vers f.

2. Application. Soit $p_0 : \begin{array}{l} [0\,;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{array}$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{n+1} : \begin{array}{l} [0;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto p_n(x) + \dfrac{1}{2}\Big(x - \big(p_n(x)\big)^2\Big) \end{array}.$$

   Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0\,;1]$.

▶ **Corrigé.–**

1. a) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_{n,\varepsilon} : \begin{array}{l} E \to \quad \mathbb{R} \\ x \mapsto f_n(x) - f(x) + \varepsilon \end{array}$ est continue, donc $F_{n,\varepsilon} = (g_{n,\varepsilon})^{-1}(]-\infty\,;0])$ est un fermé de E, comme image réciproque d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ par une application continue.
   C'est aussi un compact, comme partie fermée de l'espace compact E.

   Ensuite : pour tout $x \in F_{n+1,\varepsilon}$ on a $f_{n+1}(x) \leqslant f(x) - \varepsilon$, et comme la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $f_n(x) \leqslant f(x) - \varepsilon$, donc $x \in F_{n,\varepsilon}$, ce qui prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1,\varepsilon} \subset F_{n,\varepsilon}$.

   b) Supposons que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} \neq \varnothing$, et considérons un élément x de cet ensemble.
   Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in F_{n,\varepsilon}$ donc $f_n(x) \leqslant f(x) - \varepsilon$, et la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$, ce qui contredit l'hypothèse faite dans l'énoncé.

On en déduit que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \varnothing$.

On raisonne ensuite par l'absurde à nouveau : supposons que pour tout $p \in \mathbb{N},\ F_{p,\varepsilon} \neq \varnothing$, et soit $x_p \in F_{p,\varepsilon}$.
De la suite $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments du compact E, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément x de E.
Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N},\ x = \lim\limits_{\substack{n\to+\infty\\ n\geqslant p}} x_{\varphi(n)}$, et comme si $n \geqslant p$, alors $\varphi(n) \geqslant \varphi(p) \geqslant p$ et donc $F_{\varphi(n),\varepsilon} \subset F_{p,\varepsilon}$: on en déduit que $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant p}$ est une suite d'éléments du compact $F_{p,\varepsilon}$, et donc que la limite x appartient encore à $F_{p,\varepsilon}$.
Ainsi, $x \in \bigcap_{p\in\mathbb{N}} F_{p,\varepsilon}$, ce qui contredit le fait que cette intersection est vide : il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_0,\varepsilon} = \varnothing$.

c) Soit $\varepsilon > 0$: d'après b), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $F_{n_0,\varepsilon} = \varnothing$, et comme la suite $(F_{n,\varepsilon})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, alors pour tout $n \geqslant n_0$: $F_{n,\varepsilon} = \varnothing$.
Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$: $\quad \forall x \in E,\ f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x)$, donc :

$$\forall n \geqslant n_0,\ ||f_n - f||_\infty \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f dans E.

2. Application.

Soit $x \in [0\,;1]$, on note $u_n = p_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où} \quad f : \begin{array}{ccl} [0\,;1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t + \frac{1}{2}(x - t^2) \end{array}.$$

Pour tout $t \in [0\,;1],\ f'(t) = 1 - t \geqslant 0$ et f est croissante sur $[0\,;1]$, et pour tout $t \in [0\,;1]$: $\quad 0 \leqslant \frac{1}{2}x = f(0) \leqslant f(t) \leqslant f(1) = \frac{1}{2}(1+x) \leqslant 1$.
L'intervalle $[0\,;1]$ est donc stable par la fonction croissante f et $u_0 \in [0\,;1]$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
Comme $u_1 = \frac{x}{2} \geqslant 0 = u_0$, cette suite est même croissante ; majorée par 1, elle converge donc vers une limite ℓ qui vérifie $\ell = f(\ell)$ puisque f est continue sur $[0\,;1]$, soit :

$$\ell = \ell + \tfrac{1}{2}(x - \ell^2) \Leftrightarrow \ell^2 = x \Leftrightarrow \ell = \sqrt{x} \text{ ou } \ell = -\sqrt{x}.$$

Comme $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in [0\,;1]$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{x} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x) = \sqrt{x}$, et ce pour tout $x \in [0\,;1]$.

Ainsi la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée de fonctions continues (restriction de fonctions polynômes à $[0\,;1]$ qui est un intervalle compact pour la distance usuelle sur $\mathbb{R}$), est croissante et converge simplement vers la fonction $g: \begin{array}{l} [0\,;1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$: d'après le théorème de Dini, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ vers la fonction g.

Exercice (3). Théorème de Heine et deuxième théorème de Dini

1. **Théorème de Heine.**

   Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et $f: [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que f est uniformément continue sur $[a\,;b]$.

2. **Deuxième théorème de Dini.**

   a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n: [a\,;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et croissante sur $[a\,;b]$.
   On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a\,;b]$, vers une fonction continue f.
   Montrer alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a\,;b]$.

   b) Application. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \end{array}$.
   Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-a\,;a]$ vers la fonction exponentielle.

► **Corrigé.–**

1. On raisonne par l'absurde : supposons que f n'est pas uniformément continue sur $[a\,;b]$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n, y_n \in [a\,;b]$ avec $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $\left|f(x_n) - f(y_n)\right| \geqslant \varepsilon$.
   Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du segment $[a\,;b]$: d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in [a\,;b]$; on a alors :

$$y_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} + (y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + 0 = \ell.$$

   Comme f est continue au point ℓ, alors :

$$\left|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell - \ell| = 0 < \varepsilon,$$

   ce qui constitue une contradiction. On en déduit que f est uniformément continue sur $[a\,;b]$.

2. a) Soient $x, y \in [a\,;b]$ avec $x < y$, on a : $f_n(x) \leqslant f_n(y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(y) = f(y)$, donc f est croissante sur $[a\,;b]$.
Comme f est continue sur le segment $[a\,;b]$, le théorème de Heine assure qu'elle est uniformément continue sur ce segmet.
Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x-y| < \eta$, alors $\big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon$.
Soient alors $n = E\big(\frac{1}{\eta}\big)$ et $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$: $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ est une subdivision régulière de $[a\,;b]$ telle que $0 < x_i - x_{i-1} < \eta$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, donc :

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, n\},\ \exists N_i \in \mathbb{N}^*;\ k \geqslant N_i \Longrightarrow \big|f_k(x_i) - f(x_i)\big| < \varepsilon.$$

En posant $N = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} N_i$, on a alors, si $k \geqslant N$:

$$\big|f_k(x_i) - f(x_i)\big| < \varepsilon \text{ pour tout } i \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Soit maintenant $y \in [a\,;b]$; il existe $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tel que $y \in [x_j\,; x_{j+1}]$, et :

$$\begin{aligned}
\big|f_k(y) - f(y)\big| &\leqslant \big|f_k(y) - f_k(x_j)\big| + \big|f_k(x_j) - f(y)\big| \\
&\leqslant \big|f_k(x_{j+1}) - f_k(x_j)\big| + \big|f_k(x_j) - f(y)\big| \\
&\leqslant \big|f_k(x_{j+1}) - f(x_{j+1})\big| + \big|f(x_{j+1}) - f(x_j)\big| \\
&\qquad + \big|f(x_j) - f_k(x_j)\big| + \big|f_k(x_j) - f(x_j)\big| + \big|f(x_j) - f(y)\big| \\
&\leqslant \big|f_k(x_{j+1}) - f(x_{j+1})\big| + \big|f(x_{j+1}) - f(x_j)\big| \\
&\qquad + 2\big|f(x_j) - f_k(x_j)\big| + \big|f(x_{j+1}) - f(x_j)\big|,
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\big|f_k(y) - f(y)\big| &\leqslant \big|f_k(x_{j+1}) - f(x_{j+1})\big| + 2\big|f(x_j) - f_k(x_j)\big| + 2\big|f(x_{j+1}) - f(x_j)\big| \\
&< \varepsilon + 2\varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon \quad \text{si } k \neq N.
\end{aligned}$$

Ainsi, $||f_k - f||\infty < 5\varepsilon$ si $k \neq N$, donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a\,;b]$.

b) Soit $N = E(a) + 1$; pour tout entier $n \geqslant N$ et pour tous réels x, y éléments de $[-a\,;a]$ avec $x < y$:

$$0 \leqslant f_n(x) = \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1 + \tfrac{y}{n}\right)^n = f_n(y),$$

et la fonction f_n est croissante sur $[-a\,;a]$.
De plus, pour tout $n \geqslant N$ et tout $x \in [-a\,;a]$:

$$f_n(x) = e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{x+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x.$$

D'après le théorème de Dini, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[-a\,;a]$ vers la fonction exponentielle.

Exercice (4). Dilatation

Soit (E,d) un espace métrique compact et f une dilatation de E, c'est-à-dire une application $f:\ E\to E$ une application qui vérifie :

$$\forall (x,y)\in E^2,\quad d\big(f(x),f(y)\big)\geqslant d(x,y).$$

1. Soient x,y deux éléments de E.
   Montrer qu'il existe $\varphi:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que les suites $\big(f^{\varphi(n)}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f^{\varphi(n)}(y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans E.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)\big)$.
3. En déduire que $d\big(f(x),f(y)\big)=d(x,y)$.
4. Conclure que f est une isométrie bijective.

▶ **Corrigé.–**

1. Soient x,y deux éléments de E. De la suite $(u_n)=\big(f^n(x),f^n(y)\big)$ d'éléments du compact $E\times E$, on peut extraire une sous-suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $E\times E$: les suites $\big(f^{\varphi(n)}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f^{\varphi(n)}(y)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent donc dans E.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
   $$d\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x),x\big)\leqslant d\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)+1}(x),f(x)\big)\leqslant\cdots\leqslant d\big(f^{\varphi(n+1)}(x),f^{\varphi(n)}(x)\big),$$
   et comme d'après 1 la suite $\big(f^{\varphi(n)}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors elle est de Cauchy, et donc $d\big(f^{\varphi(n+1)}(x),f^{\varphi(n)}(x)\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
   Par conséquent, $d\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x),x\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, et la suite $\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente dans (E,d).
3. L'application $\varphi:\ \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante, donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1)\geqslant\varphi(n)+1$, et :
   $$d(x,y)\leqslant d\big(f(x),f(y)\big)\leqslant\cdots\leqslant d\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x),f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)\big).$$
   Par ailleurs l'application distance $d:\ \begin{array}{rcl}E\times E&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&d(x,y)\end{array}$ est continue, donc d'après 2 : $d\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x),f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(y)\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}d(x,y)$.
   Par encadrement, on en déduit que $d\big(f(x),f(y)\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}d(x,y)$, c'est-à-dire : $\quad d\big(f(x),f(y)\big)=d(x,y)$.

4. D'après 3 : $\forall (x,y) \in E \times E,\ d\big(f(x), f(y)\big) = d(x,y)$, donc f est injective et continue.
De plus, E est compact donc $f(E)$ est une partie compacte, donc fermée de E.
Comme d'après 2, et pour tout x de E :
$$x = \lim_{n \to +\infty} f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) = \lim_{n \to +\infty} f\big(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)-1}(x)\big),$$
alors $x \in f(E)$ comme limite d'une suite d'éléments de E.
On en déduit que $f(E) = E$, donc que f est surjective, puis bijective : c'est bien une isométrie bijective de E sur lui-même.

Exercice (5). Théorèmes de point fixe

1. **Théorème du point fixe pour les compacts.**
Soit (E,d) un espace métrique compat, $f:\ E \to E$ une application qui vérifie :
$$d\big(f(x), f(y)\big) < d(x,y) \text{ pour tous } x,\ y \text{ de } E \text{ avec } x \neq y.$$
   a) Montrer que f possède un unique point fixe, noté c.
   Indication : on pourra utiliser l'application $g:\ \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & d\big(x, f(x)\big) \end{array}$.
   b) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :
   $$x_0 \in E \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$
   Montrer que cette suite converge vers c.
   Indication : montrer que la suite $\big(d(x_n, c)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ *est décroissante.*
2. **Théorème de point fixe pour les compacts convexes.**
Soit C une partie convexe et compacte d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$, et $f:\ C \to C$ une application qui vérifie :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ ||f(x) - f(y)|| \leqslant ||x - y||.$$
   a) Soit $a \in C$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'application définie sur C par $f_n(x) = \dfrac{a}{n} + \big(1 - \dfrac{1}{n}\big) f(x)$, possède un unique point fixe.
   b) En déduire que l'application f possède (au moins) un point fixe.

▶ **Corrigé.–**

1. a) Si f possède (au moins) deux points fixes distincts x_1 et x_2, alors : $||x_1 - x_2|| = ||f(x_1) - f(x_2)|| < ||x_1 - x_2||$, ce qui est impossible.
Donc f possède au maximum un point fixe.
L'application $f:\ E \to E$ est 1-lipschitzienne, donc continue sur E.

L'application distance $d: \begin{array}{rcl} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$ est continue,

donc $g: \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & d\big(x, f(x)\big) \end{array}$ est aussi continue, et comme E est un compact, alors $g(E)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}_+$.
Par conséquent, $g(E)$ possède un plus petit élément $m \in \mathbb{R}_+$, et il existe $c \in E$ tel que $g(c) = m \Leftrightarrow d\big(c, f(c)\big) = m$.
Si $m > 0$, alors $c \neq f(c)$, donc par définition de f :

$$d\Big(f(c), f\big(f(c)\big)\Big) < d\big(c, f(c)\big), \text{ soit } g\big(f(c)\big) < m,$$

ce qui contredit la définition du minimum m.
On en déduit que $d\big(c, f(c)\big) = 0$, soit $f(c) = c$, et donc que f possède un unique point fixe.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N} : d(x_{n+1}, c) = d\big(f(x_n), f(c)\big) \leqslant d(x_n, c)$, donc $\big(d(x_n, c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs décroissante ; minorée par 0, cette suite converge, on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, c)$.

D'autre part, comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du compact E, on peut donc en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans E.
On note $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$; comme l'application distance d est continue, alors $d(x_{\varphi(n)}, c) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(\alpha, c)$.
Toujours par continuité de d et de f :

$$d(x_{\varphi(n)+1}, c) = d\big(f(x_{\varphi(n)}), f(c)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d\big(f(\alpha), f(c)\big).$$

Or $\big(d(x_{\varphi(n)}, c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(d(x_{\varphi(n)+1}, c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de la suite $\big(d(x_n, c)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, donc elles convergent toutes les deux vers ℓ. On en déduit : $d(\alpha, c) = d\big(f(\alpha), f(c)\big)$, ce qui implique $\alpha = c$ (si $\alpha \neq c$, alors $d\big(f(\alpha), f(c)\big) < d(\alpha, c)$).
Ainsi : $\ell = d(\alpha, c) = 0$ et $d(x_n, c) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui signifie bien que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c dans (E, d).

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour tout $x \in \mathbb{C}$, $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot a + \big(1 - \frac{1}{n}\big) \cdot f(x) \in C$ puisque C est convexe, avec a, $f(x) \in C$ et $\frac{1}{n} + \big(1 - \frac{1}{n}\big) = 1$.
De plus, pour tous x, y de C : $||f_n(x) - f_n(y)|| = \big(1 - \frac{1}{n}\big)||x - y||$, donc $f_n : C \to C$ est $\big(1 - \frac{1}{n}\big)$-lipschitzienne ; comme C est une partie compacte (donc complète) de $(E, ||\cdot||)$, alors d'après le théorème du point fixe, f_n admet un unique point fixe x_n dans C.

b) De la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments du compact C, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément de C, noté α.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = \frac{a}{\varphi(n)} + \left(1 - \frac{1}{\varphi(n)}\right) \cdot f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\alpha),$$

puisque f est continue (car 1-lipschitzienne).
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$, donc par passage à la limite dans cette égalité quand n tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\alpha = f(\alpha).$$

Exercice (6). Théorème de Riesz

Soit $\left(E, ||\cdot||\right)$ un espace vectoriel normé.

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
   a) Montrer que pour tout x de E, il existe $\hat{x} \in F$ tel que :
   $$||x - \hat{x}|| = d(x, F).$$
   b) En déduire que si $F \neq E$, alors il existe $u \in F$ tel que $||u|| = 1$ et $d(u, F) = 1$.
   Indication : considérer $x \in E \setminus F$ *et* $u = \dfrac{x - \hat{x}}{||x - \hat{x}||}$.
2. On suppose que E est de dimension infinie ; soit $\{e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ une famille libre infinie de E, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.
   a) Déduire de 1.b) qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad ||u_n|| = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2,\ d(u_n, F_{n-1}) = 1.$$
   b) En déduire que pour tous entiers n et p de $\mathbb{N}^*$ avec $n \neq p$, on a $||u_n - u_p|| \geqslant 1$, puis que $B_f(0\,,1) = \{x \in E\,;\ ||x|| \leqslant 1\}$, la boule unité, n'est pas compacte.
3. Conclure que $B_f(0, 1)$ est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

▶ **Corrigé.**– Soit donc $\left(E, ||\cdot||\right)$ un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

1. a) Par définition : $d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} ||x - y||$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $y_n \in F$ tel que $d(x, F)\text{‘}leq||x - y_n|| < d(x, F) + \frac{1}{n}\cdot$ D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$||y_n|| = ||x - (x - y_n)|| \leqslant ||x|| + ||x - y_n|| \leqslant ||x|| + d(x, F) + 1,$$
   donc (y_n) est une suite bornée d'éléments de F : comme ce dernier est de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass

on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers un élément $\hat{x}$ de F. On a alors :

$$||x - \hat{x}|| = \lim_{n \to +\infty} ||x - y_{\varphi(n)}|| = d(x, F).$$

b) Soit $x \in E \setminus F$ et $u = \dfrac{x - \hat{x}}{||x - \hat{x}||}$, alors $||u|| = 1$ et, comme $0_E \in F$, alors $d(u, F) \leqslant ||u - 0_E|| = ||u|| = 1$. D'autre part, pour tout $y \in F$, on a :

$$||u - y|| = \left|\left|\frac{x - \hat{x}}{||x - \hat{x}||} - y\right|\right| = \frac{1}{||x - \hat{x}||} \cdot ||x - (\hat{x} + ||x - \hat{x}|| \cdot y) \geqslant \frac{d(x, F)}{d(x, F)}$$

car $\hat{x} + ||x - \hat{x}|| \cdot y \in F$, donc $d(u, F) \geqslant 1$, et ainsi $d(u, F) = 1$.

2. a) On choisit $u_1 = \dfrac{e_1}{||e_1||}$; pour tout entier $n \geqslant 2$, F_{n-1} est un sous-espace vectoriel de F_n, et $F_{n-1} \neq F_n$, donc d'après 1.b) il existe $u_n \in F_n$ tel que $||u_n|| = 1$ et $d(u_n, F_{n-1}) = 1$.

   b) Supposons $p < n$, alors :

$$u_p \in F_p \subset F_{n-1}, \text{ puis } ||u_n - u_p|| \geqslant d(u_n, F_{n-1}) \geqslant 1,$$

donc pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante :

$$||u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(m)}|| \geqslant 1 \text{ si } n \neq m.$$

On ne peut donc pas extraire de la suite (u_n) (constituée d'éléments de $B_f(0, 1)$) une sous-suite convergente, donc $B_f(0, 1)$ n'est pas compacte.

3. On sait (d'après le cours) que si E est de dimension finie, alors $B_f(0, 1)$ est compacte. D'après la question précédente, la réciproque est donc vraie.

Exercice (7). Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $A:\ I\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B:\ I\to\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux fonctions continues.
Soit le problème de Cauchy :

$$\text{(C.L.)}\begin{cases} X'(t) & = A(t)X(t)+B(t) \text{ pour tout } t\in I \\ X(t_0) & = X_0 \quad (\text{où } t_0\in I \text{ et } X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ sont donnés.}) \end{cases}.$$

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ d'une norme $||\cdot||$; on définit aussi, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\quad |||A||| = \sup\limits_{\substack{X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K});\\ ||X||=1}} ||AX||$.

Pour tout segment $[\alpha\,;\beta]$ inclus dans I, on note $M_{\alpha,\beta}=\max\limits_{t\in[\alpha\,;\beta]}|||A(t)|||$ et $||X||_{[\alpha\,;\beta]}=\max\limits_{t\in[\alpha\,;\beta]}||X(t)||$.

1. **Unicité.** Soient X et Y deux solutions de (C.L.), soit $t\in I$ et soit $[\alpha\,;\beta]$ un segment inclus dans I qui contient t_0 et t.
   Montrer que pour tout $p\in\mathbb{N}$:

   $$||X(t)-Y(t)||\leqslant\frac{(M_{\alpha,\beta})^p\cdot|t-t_0|^p}{p!}\cdot||X-Y||_{[\alpha\,;\beta]},$$

   et en déduire que $X=Y$.
2. **Existence.**
   a) On suppose que I est un segment $[a\,;b]$, soit $E=\mathcal{C}\big([a\,;b]\,;\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\big)$.
   On munit E de la norme $||\cdot||_{[a\,;b]}$, et on définit pour $X\in E$, l'application $H_X:\ \begin{array}{rcl}[a\,;b] & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t & \mapsto & X_0+\displaystyle\int_{t_0}^{t}\big(A(u)X(u)+B(u)\big)\mathrm{d}u\end{array}.$

      i. Justifier que $(E,||\cdot||_{[a\,;b]})$ est un espace de Banach, et que $H_X\in E$.

      ii. Soit l'application $H:\ \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ X & \mapsto & H_X\end{array}.$
      Montrer que si Y,Z sont des éléments de E et $t\in[a\,;b]$, alors pour tout $p\in\mathbb{N}$:

      $$||H^p(Y)(t)-H^p(Z)(t)||\leqslant\frac{(M_{[a\,;b]})^p\cdot|t-t_0|^p}{p!}\cdot||Y-Z||_{[a\,;b]},$$

      et en déduire qu'il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que H soit contractante.

      iii. En déduire que H possède un unique point fixe X dans E, et que X est solution de (C.L.).

   b) Traiter le cas où I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
   Indication : montrer que si J_1 et J_2 sont deux segments de I avec $J_1\cap J_2\neq\varnothing$, et si X_1 et X_2 sont deux solutions de (C.L.) sur J_1 et J_2 respectivement, alors pour tout $t\in J_1\cap J_2$, $X_1(t)=X_2(t)$.

Exercice (8). Équivalence de normes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), soient $||\cdot||$ une norme sur E et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Soit la norme $||\cdot||_\infty$: $\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i & \mapsto & \displaystyle\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \end{array}$, on note :

$$S_\infty(0\,,1) = \left\{x \in E \text{ tel que } ||x||_\infty = 1\right\}.$$

1. Montrer que $\left\{||x||\,; x \in S_\infty(0\,,1)\right\}$ a un plus petit élément strictement positif ; on le note $\dfrac{1}{M}$.
   En déduire que : $\quad \forall x \in E,\ ||x||_\infty \leqslant M \cdot ||x||$.
2. Montrer que : $\quad \forall x \in E,\ ||x|| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ||e_i||\right) \cdot ||x||_\infty$, et conclure.

Exercice (9).

Soient $f, g :\ [0\,;1] \to [0\,;1]$ deux fonctions continues vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

1. a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus petit et un plus grand élément.
   b) En déduire qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.
2. Deuxième preuve.
   a) On suppose que : $\quad \forall x \in [0\,;1],\ f(x) > g(x)$.
   Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0\,;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f^n(x) \geqslant g^n(x) + n\alpha \qquad (\text{où } f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}).$$
   b) En déduire qu'il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice (10).

Soit $f :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \end{array}$.

1. Montrer que :
   $$\forall A > 0,\ \exists R > 0 \text{ tel que } ||(x,y)|| > R \text{ implique } |f(x,y)| > A.$$
2. Montrer que f possède un minimum global, et préciser les points où il est atteint.

Imprimé en Belgique et achevé sur les presses de SNEL Grafics, Liège
Dépôt légal mars 2022