18 octobre 2021

Exemples d'études d'applications linéaires continues et de leur norme (Leçon 439)

Exercice (1).

1. **Une norme non atteinte**

   On considère l'espace $E = \mathcal{C}\big([0;1],\mathbb{R}\big)$ et l'application :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right) \end{array}.$$

   a) Soit $f \in E$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

   b) Montrer que φ est linéaire et que $|||\varphi||| = 1$.

   c) Montrer que cette norme n'est pas atteinte.

2. **Opérateur de dérivation**

   a) Montrer que les deux applications suivantes sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$:

$$||\cdot||_\infty : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto & \displaystyle\max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| \end{array} \quad \text{et} \quad N : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto & \displaystyle\max_{0\leqslant k\leqslant n} \big(k!|a_k|\big) \end{array}.$$

   b) Montrer que $D : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \end{array}$, l'application de dérivation, est linéaire, et étudier sa continuité si on munit $\mathbb{R}[X]$ de chacune des deux normes $||\cdot||_\infty$ ou N.

▶ **Corrigé.**

1. a) Pour tout $f \in E$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\Big|\frac{(-1)^k}{2^k} \cdot f\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big| = \frac{1}{2^k}\Big|f\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big| \leqslant \frac{||f||_\infty}{2^k},$$

et comme la série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^k}$ converge, alors la série $\sum \dfrac{(-1)^k}{2^k} f\Big(\dfrac{1}{k}\Big)$ est absolument convergente, donc convergente.

b) a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tous éléments f, g de E :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda \cdot f + g) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}\big(\lambda \cdot f\big(\tfrac{1}{k}\big) + g\big(\tfrac{1}{k}\big)\big) \\ &= \lambda \cdot \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} f\big(\tfrac{1}{k}\big)\Big) + \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} g\big(\tfrac{1}{k}\big)\Big) \\ &= \lambda \cdot \varphi(f) + \varphi(g),\end{aligned}$$

donc l'application φ est linéaire. De plus :

$$\begin{aligned}||\varphi(f)|| = \Big|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} f\big(\tfrac{1}{k}\big)\Big| &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \Big|\frac{(-1)^k}{2^k} f\big(\tfrac{1}{k}\big)\Big| \\ &\leqslant \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\Big) \cdot ||f||_\infty = ||f||_\infty,\end{aligned}$$

donc la forme linéaire φ est continue, et $|||\varphi||| \leqslant 1$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit la fonction $f_n : \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \cos\big(\frac{\pi}{x}\big) & \text{si } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \\ (-1)^n \cdot nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \end{cases} \end{array}$.

Il est évident que $f_n \in E$ et que $||f_n||_\infty = 1$; de plus :

$$\begin{aligned}\varphi(f_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \cos(k\pi) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{n}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{n}{k},\end{aligned}$$

or : $\quad \Big|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{n}{k}\Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$

et : $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \big(\frac{1}{2}\big)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$

donc : $\varphi(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Or : $|||\varphi||| = \sup\limits_{||f||=1} \big|\varphi(f)\big| \geqslant \varphi(f_n)$, et en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient : $|||\varphi||| \geqslant 1.$

On en conclut que $|||\varphi||| = 1.$

c) Supposons qu'il existe $g \in E$ telle que $||g||_\infty = 1$ et $\big|\varphi(g)\big| = 1$: comme $\varphi(-g) = -\varphi(g)$, quitte à remplacer g par $-g$, on peut supposer que $||g||_\infty = 1$ et que $\varphi(g) = 1$, soit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot g\Big(\frac{1}{k}\Big) = 1.$

Comme $1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\Big(1 - (-1)^k g\big(\tfrac{1}{k}\big)\Big) = 0.$

Or $||g||_\infty = 1$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\big|g\big(\frac{1}{k}\big)\big| \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 - (-1)^k g\big(\frac{1}{k}\big) \geqslant 0.$
Une somme de termes positifs est nulle, si et seulement si chacun de ses termes est nul :
on en déduit $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 1 - (-1)^k g\big(\frac{1}{k}\big) = 0 \Leftrightarrow g\big(\frac{1}{k}\big) = (-1)^k$: ceci n'a pas de limite quand k tend vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que g appartient à E. On a donc démontré par l'absurde, que cette norme n'est pas atteinte.

2. a) On vérifie que $||\cdot||_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$:

i. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X_k \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Big|\Big|\sum_{k=0}^{n} a_k X^n\Big|\Big|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| = 0 \Leftrightarrow \big(\forall k \in \{0,1,\dots,n\},\ a_k = 0\big)$$

$$\Leftrightarrow P = \sum_{k=0}^{n} a_k X_k = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

ii. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$\forall \ell \in \{0,1,\dots,n\},\quad |\lambda a_\ell| = |\lambda| \cdot |a_\ell| \leqslant |\lambda| \cdot \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k| = |\lambda| \cdot ||P||_\infty,$

donc $||\lambda P||_\infty = \max\limits_{0\leqslant \ell\leqslant n} |\lambda a_\ell \leqslant |\lambda| \cdot ||P||_\infty$ $(\star)$, donc si $\lambda \neq 0$:

$||P||_\infty = \Big|\Big|\dfrac{1}{\lambda}(\lambda P)\Big|\Big|_\infty = \Big|\dfrac{1}{\lambda}\Big| \cdot ||\lambda P||_\infty$, puis $|\lambda| \cdot ||P||_\infty \leqslant ||\lambda P||\infty,$

et donc : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ ||\lambda P||_\infty = |\lambda| \cdot ||P||_\infty.$

iii. Soit $P=\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ dans $\mathbb{R}[X]$. On peut supposer que $m \geqslant n$ et on pose alors $b_k=0$ pour tout entier k tel que $n<k\leqslant m$. Pour tout $\ell \in \{0,1,\dots,m\}$:

$$|a_\ell+b_\ell| \leqslant |a_\ell|+|b_\ell| \leqslant ||P||_\infty+||Q||_\infty,$$

donc $||P+Q||_\infty = \max\limits_{0\leqslant \ell\leqslant m} |a_\ell+b_\ell| \leqslant ||P||_\infty+||Q||_\infty$.

Ainsi, $||\cdot||_\infty$ est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On démontre de façon analogue que N est une autre norme sur ce même espace.

b) Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, et tous polynômes $P=\sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$, avec la même convention que ci-dessus ($m\geqslant n$ et $b_k=0$ si $n<k\leqslant m$) :

$$\begin{aligned} D(\lambda\cdot P+Q) &= \sum_{k=1}^{m}(\lambda a_k+b_k)\cdot kX^{k-1} = \lambda\sum_{k=1}^{m} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{\cancel{m}\ n} k b_k X^{k-1} \\ &= \lambda\cdot D(P)+D(Q), \end{aligned}$$

donc D est linéaire.

i. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{||D(X^n)||_\infty}{||X^n||_\infty} = \dfrac{n}{1} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc D n'est pas continue si on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $||\cdot||_\infty$.

ii. Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. On a, pour tout $\ell\in\{1,2,\dots,n\}$:

$$(\ell-1)!|\ell a_\ell| = |\ell! a_\ell| \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant n} |k! a_k| = N(P),$$

donc $N\big(D(P)\big) = \max\limits_{1\leqslant \ell\leqslant n}\big((\ell-1)!|\ell a_\ell|\big) \leqslant N(P)$. Si P est un polynôme constant, alors $N\big(D(P)\big)=0\leqslant N(P)$, donc N est continue et $|||D|||\leqslant 1$.

De plus, $\dfrac{N\big(D(X)\big)}{N(X)} = \dfrac{1}{1} = 1$, donc $|||D|||\geqslant 1$; on en déduit que si on munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme N, alors D est continue et $|||D|||=1$.

Exercice (2).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $||\cdot||_i$ ($i = 1,\ 2$ ou ∞) et on note $|||A|||_i$ la norme subordonnée à l'application linéaire canonique associée à A (soit l'application $\begin{array}{rcl} : \ \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$).

1. Montrer que $|||A|||_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$.
2. Montrer que $|||A|||_1 = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum\limits_{i=1}^n |a_{i,j}| \right)$.
3. a) Montrer que si A est symétrique, alors :

$$|||A|||_2 = \mathscr{C}(A), \quad \text{où} \quad \mathscr{C}(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \big(|\lambda|\big).$$

Indication : on pourra utiliser le théorème spectral.

b) Dans le cas général, montrer que : $\quad |||A|||_2 = \sqrt{\mathscr{C}({}^{\mathrm{t}}AA)}$.

▶ **Corrigé.–**

Notons d'abord que les normes $|||\cdot|||_i$ ($i = 1, 2$ ou ∞) existent car $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

1. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\quad AX = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^n a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^n a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$, et on a pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \cdot ||X||_\infty$$
$$\leqslant \left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \cdot ||X||_\infty,$$

donc : $\quad ||AX||_\infty \leqslant \left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}| \right) \cdot ||X||_\infty$, donc $|||A|||_\infty \leqslant \left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}| \right)$.

Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ qui vérifie : $\quad \sum\limits_{j=1}^n |a_{k,j}| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|$, et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, où $y_j = \begin{cases} \dfrac{a_{k,j}}{|a_{k,j}|} & \text{si } a_{k,j} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $||Y||_\infty = 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^n a_{k,j} y_j = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}|$, donc :

$$|||A|||_\infty = |||A|||_\infty \cdot ||Y||_\infty \geqslant ||AY||_\infty \geqslant \left| \sum_{j=1}^n a_{k,j} y_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{k,j}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|,$$

donc par double inégalité : $\quad \displaystyle |||A|||_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} ||AX||_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \leqslant \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i,1}^n |a_{i,j}| \right) |x_j| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^n \left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \right) |x_j| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \right) \cdot ||X||_1, \end{aligned}$$

d'où : $\quad \displaystyle |||A|||_1 \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \right).$

Ensuite, soit ℓ qui vérifie : $\quad \displaystyle \sum_{i=1}^n |a_{i,\ell}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,k}| \right),$

et e_ℓ le ℓ-ième élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dont la coordonnée d'indice ℓ vaut 1, les autres étant nulles. On a $Ae_\ell = \begin{pmatrix} a_{1,\ell} \\ a_{2,\ell} \\ \vdots \\ a_{n,\ell} \end{pmatrix}$ et

$||e_\ell||_1 = 1$, donc $\displaystyle |||A|||_1 = |||A|||_1 \cdot ||e_\ell||_1 \geqslant ||Ae_\ell||_1 = \sum_{i=1}^n |a_{i,\ell}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{i=1}^n |a_{i,k}|$,

donc $\displaystyle |||A|||_1 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right).$

3. a) D'après le théorème spectral, puisque A est symétrique réelle, il existe une base orthonormale $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A : pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des réels tels que pour tout i compris entre 1 et n, $A\varepsilon_i = \lambda_i \cdot \varepsilon_i$ (les λ_i sont évidemment les valeurs propres de A).

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \varepsilon_i$, et on a : $\quad AX = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot A\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \cdot \varepsilon_i$, de sorte que :

$$\big(||AX||_2\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 {\lambda_i}^2 \leqslant \big(\mathscr{C}(A)\big)^2 \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2\Big) = \big(\mathscr{C}(A)\big)^2 \cdot \big(||X||_2\big)^2,$$

   d'où : $\quad ||AX||_2 \leqslant \mathscr{C}(A) \cdot ||X||_2$, puis $|||A|||_2 \leqslant \mathscr{C}(A)$.

   Soit maintenant $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $\lambda_k = \mathscr{C}(A)$, on a alors :

$$|||A|||_2 = |||A|||_2 \cdot ||\varepsilon_k||_2 \geqslant ||A\varepsilon_k||_2 = ||\lambda_k \cdot \varepsilon_k||_2 = |\lambda_k| = \mathscr{C}(A),$$

   et par conséquent : $\quad |||A|||_2 = \mathscr{C}(A)$.

   b) Dans le cas général, on sait que ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AA) = {}^{\mathrm{t}}AA$, c'est-à-dire que ${}^{\mathrm{t}}AA$ est symétrique réelle. D'après a), on a donc : $|||\,{}^{\mathrm{t}}AA|||_2 = \mathscr{C}({}^{\mathrm{t}}AA)$. Par ailleurs, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\big(||AX||_2\big)^2 &= {}^{\mathrm{t}}(AX)AX = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AAX \\ &= \langle {}^{\mathrm{t}}AAX, X\rangle \quad \text{avec le produit scalaire usuel} \\ &\leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}AAX|||_2 \cdot ||X||_2 \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy} \\ &\leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}AA|||_2 \cdot \big(||X||_2\big)^2,\end{aligned}$$

   d'où : $\quad \big(|||A|||_2\big)^2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}AA|||_2$.

   Or : $||\,{}^{\mathrm{t}}AAX||_2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}A|||_2 \cdot ||AX||_2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}A|||_2 \cdot |||A|||_2 \cdot ||X||_2$,
   donc $|||\,{}^{\mathrm{t}}AA|||_2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}A|||_2 \cdot |||A|||_2$, et donc $\big(|||A|||_2\big)^2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}A|||_2 \cdot |||A|||_2$,
   d'où $|||A|||_2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}A|||_2$.

   De façon symétrique, on a aussi $|||\,{}^{\mathrm{t}}A|||_2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}A)|||_2 = |||A|||_2$,
   donc $|||A|||_2 = |||\,{}^{\mathrm{t}}A|||_2$. Ainsi :

$$\big(|||A|||_2\big)^2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}AA|||_2 \leqslant |||\,{}^{\mathrm{t}}A|||_2 \cdot |||A|||_2 = \big(|||A|||_2\big)^2,$$

   donc $\big(|||A|||_2\big)^2 = |||\,{}^{\mathrm{t}}AA|||_2 = \mathscr{C}({}^{\mathrm{t}}AA)$, et :

$$|||A|||_2 = \sqrt{\mathscr{C}({}^{\mathrm{t}}AA)}.$$

Exercice (3).

Soit $E=\mathcal{C}\big([0;\frac{\pi}{2}],\mathbb{R}\big)$ et l'application $T: \begin{array}{l} E\to E \\ f\mapsto T(f)\end{array}$,

où $T(f): \begin{array}{l}\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\end{array}$.

1. Montrer que T est linéaire.
2. On munit E de la norme $||\cdot||_\infty$. Montrer que T est continue, et calculer $||T||_\infty$.
3. On munit E de la norme $||\cdot||_1$. Montrer que T est continue, et calculer $||T||_1$.

   Indication : considérer la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x)=\begin{cases}-\frac{n^2}{2}x+n & si\ 0\leqslant x\leqslant\frac{2}{n}\\ 0 & si\ \frac{2}{n}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

4. Soit $f\in E$ et $g=T(f)$.
   Pour $c\in[0\,;1[$, on définit l'application $p: \begin{array}{l}\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]\to\ \mathbb{R} \\ x\ \mapsto c\cdot\tan\Big(c\big(\frac{\pi}{2}-x\big)\Big)\end{array}$.
   a) Calculer p' en fonction de p.
   b) Développer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(g'(x)-p(x)\cdot g(x)\big)^2\mathrm{d}x$, et en déduire que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(g(x)\big)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(g'(x)\big)^2\mathrm{d}x.$$

   En déduire que T est continue et que $||T||_2\leqslant 1$.
   c) Calculer $||\cos||_2$ et $||T(\cos)||_2$, et en déduire que $||T||_2=1$.

► **Corrigé.–**

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $f,\ g\in E$, on a pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}T(\lambda\cdot f+g)(x)&=\int_0^x\big(\lambda\cdot f(t)+g(t)\big)\mathrm{d}t=\lambda\cdot\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\\&=\big(\lambda\cdot T(f)+T(g)\big)(x),\end{aligned}$$

donc $T(\lambda\cdot f+g)=\lambda\cdot T(f)+T(g)$ et T est linéaire.

2. Pour tout $f \in E$, et pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\begin{aligned}\left|T(f)(x)\right| = \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(t)|\mathrm{d}t \leqslant ||f||_\infty \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \cdot ||f||_\infty,\end{aligned}$$

d'où : $\quad ||T(f)||_\infty = \sup\limits_{x\in[0\,;\frac{\pi}{2}]} \left|T(f)(x)\right| \leqslant \frac{\pi}{2} \cdot ||f||_\infty$, donc T est continue,

et $|||T|||_\infty \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot$.

Ensuite, la fonction $\mathbb{1} : \begin{array}{l} \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R} \\ \quad t \;\mapsto 1 \end{array}$ est continue ; on a : $||\mathbb{1}||_\infty = 1$,

et pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$T(\mathbb{1})(x) = \int_0^x \mathrm{d}t = x, \text{ puis } ||T(\mathbb{1})||_\infty = \sup_{x\in[0\,;\frac{\pi}{2}]} \left|T(\mathbb{1})(x)\right| = \frac{\pi}{2},$$

d'où : $\quad |||T|||_\infty \geqslant \dfrac{||T(\mathbb{1})||_\infty}{||\mathbb{1}||_\infty} = \dfrac{\pi}{2}$ et $|||T|||_\infty = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

3. Soit $f \in E$, on a :

$$\begin{aligned}||T(t)||_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|T(f)(x)\right|\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x |f(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi}{2} \cdot ||f||_1,\end{aligned}$$

donc T est continue et $|||T|||_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Par ailleurs, avec la fonction f_n indiquée par l'énoncé :

$$||f_n||_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2}{n}} |f_n(t)|\mathrm{d}t)\,\frac{1}{2} \cdot n \cdot \frac{2}{n} = 1,$$

(aire d'un triangle rectangle).

Ensuite, $||T(f_n)||_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|T(f_n)(x)\right|\mathrm{d}x \geqslant \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left|t(f_n)(x)\right|\mathrm{d}x$,

or pour tout $x \in \left[\frac{2}{n}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $T(f_n)(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{2}{n}} f_n(t)\mathrm{d}t + 0 = 1$, donc $||T(f_n)||_1 \geqslant \displaystyle\int_{\frac{2}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{n}$, et donc :

$$||T||_1 = \sup_{||f||_1=1} ||T(f)||_1 \geqslant ||T(f_n)||_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{n},$$

donc $|||T|||_1 \geqslant \dfrac{\pi}{2}$, et finalement $|||T|||_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

4. a) Pour tout $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$p'(x) = -x^2\Big(1 + \tan^2\big(c(\tfrac{\pi}{2} - x)\big)\Big) = -c^2 - \big(p(x)\big)^2.$$

b) D'après une identité remarquable et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g'(x) - p(x)\cdot g(x)\big)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g'(x)\big)^2 \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(p(x)\big)^2 \cdot \big(g(x)\big)^2 \mathrm{d}x$$
$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2g'(x)\cdot g(x)\cdot p(x)\mathrm{d}x.$$

Or par I.P.P. :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2g'(x)\cdot g(x)\cdot p(x)\mathrm{d}x &= \underbrace{\Big[\big(g(x)\big)^2\cdot p(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g(x)\big)^2\cdot p'(x)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g(x)\big)^2\cdot\Big(-c^2 - \big(p(x)\big)^2\Big)\mathrm{d}x \quad \text{d'après a)} \\ &= c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g(x)\big)^2\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(p(x)\big)^2\cdot\big(g(x)\big)^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g'(x) - p(x)\cdot g(x)\big)^2\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g'(x)\big)^2\mathrm{d}x - c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g(x)\big)^2\mathrm{d}x,$

puis : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g'(x)\big)^2\mathrm{d}x \geqslant c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g(x)\big)^2\mathrm{d}x$, ceci pour tout $c \in [0\,;1[$.

On en déduit donc : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g'(x)\big)^2\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(g(x)\big)^2\mathrm{d}x,$

soit : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f(x)\big)^2\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(T(f)(x)\big)^2\mathrm{d}x,$

et donc : $\big(||f||_2\big)^2 \geqslant \big(||T(f)||_2\big)^2$, donc $||T(f)||_2 \leqslant ||f||_2$.

On en déduit que T est continue, et que $|||T|||_2 \leqslant 1$.

De plus :

$$\big(||\cos||_2\big)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2t)\big)\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}\Big[t+\tfrac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}\,,$$

et :

$$\begin{aligned}\big(||T(\cos)||_2\big)^2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(T(\cos)(x)\big)^2\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x \cos(t)\mathrm{d}t\right)^2\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1-\cos(2t)\big)\mathrm{d}t\\ &= \tfrac{1}{2}\Big[t-\tfrac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi : $\quad ||\cos||_2 = T(\cos)||_2 = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2},$ et :

$$|||T|||_2 = \sum_{f\in E\setminus\{0\}} \frac{||T(f)||_2}{||f||_2} \geqslant \frac{||T(\cos)||_2}{||\cos||_2} = 1,$$

et donc : $\quad |||T|||_2 = 1.$

Exercice (4). Opérateur intégrale de Fredholm

Soit $E = \mathcal{C}\big([0\,;1], \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$,
et soit $K = \mathcal{C}\big([0\,;1] \times [0\,;1], \mathbb{R}\big)$.

1. Montrer que l'application :

$$\begin{array}{rcl} \varphi: & E \to E \\ & f \mapsto \varphi(f) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} \varphi(f): & [0\,;1] & \to \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \displaystyle\int_0^1 K(x,t)f(t)\mathrm{d}t \end{array},$$

   est linéaire et continue. Démontrer ensuite que :

$$|||\varphi||| \leqslant \int_0^1 \big|K(c,t)\big|\mathrm{d}t, \quad \text{où} \quad \big|K(c,t)\big| = \max_{x\in[0\,;1]} \int_0^1 \big|K(x,t)|\mathrm{d}t.$$

2. On suppose que : $\quad \forall t \in [0\,;1],\ K(c,t)$ est de signe positif.
   Calculer $|||\varphi|||$.

3. a) Montrer que si F_1 et F_2 sont deux parties fermées disjointes d'un espace vectoriel normé $\big(E, ||\cdot||\big)$, alors il existe une fonction continue $g:\ E \to [-1;1]$ telle que : $\quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F_1 \\ -1 & \text{si } x \in F_2 \end{cases}.$

   b) Calculer $|||\varphi|||$.

   Indication : on pourra utiliser, pour tout $\varepsilon > 0$, les ensembles :

$$F_\varepsilon = \big\{t \in [0;1] \mid K(c,t) \geqslant \varepsilon\big\} \quad \textit{et} \quad F_0 = \big\{t \in [0;1] \mid K(c,t) \leqslant 0\big\}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. L'application φ est linéaire ; en effet pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tous $f,\ g \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;1], \quad \varphi(\lambda\cdot f + g)(x) &= \int_0^1 K(x,t)\big(\lambda\cdot f(t) + g(t)\big)\mathrm{d}t \\ &= \lambda \cdot \int_0^1 K(x,t)f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 K(x,t)g(t)\mathrm{d}t \\ &= \big(\lambda\cdot\varphi(f) + \varphi(g)\big)(x), \end{aligned}$$

   donc $\varphi(\lambda\cdot f + g) = \lambda\cdot\varphi(f) + \varphi(g)$.

   Ensuite, l'application $(x,t) \mapsto K(x,t)f(t)$ de $[0\,;1]\times[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ est continue, donc (propriété des intégrales à paramètre sur un segment), la fonction $\varphi(f)$ est continue, et donc $\varphi(f) \in E$.

   D'autre part, l'application $\begin{array}{rcl} |K|: & [0\,;1]\times[0\,;1] \to & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto \big|K(x,t)\big| \end{array}$ est continue, donc la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \left|K(x,t)\right| \mathrm{d}t$ de $[0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$, est continue : elle est donc bornée et atteint ses bornes, et par conséquent il existe $c \in [0\,;1]$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \left|K(c,t)\right| \mathrm{d}t = \max_{x\in[0\,;1]} \left(\int_0^1 \left|K(x,t)\right| \mathrm{d}t\right)$.

Enfin :

$$\begin{aligned}\left|\varphi(f)(x)\right|` = \left|\int_0^1 K(x,t)f(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \left|K(x,t)\right| \cdot \left|f(t)\right| \mathrm{d}t \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \left|K(x,t)\right| \mathrm{d}t\right) \cdot ||f||_\infty \leqslant \left(\int_0^1 \left|K(c,t)\right| \mathrm{d}t\right) \cdot ||f||_\infty,\end{aligned}$$

d'où : $\quad ||\varphi(f)||_\infty \leqslant \left(\displaystyle\int_0^1 \left|K(c,t)\right| \mathrm{d}t\right) \cdot ||f||_\infty$, puis $|||\varphi||| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|K(c,t)\right| \mathrm{d}t$.

2. L'application $\mathbb{1} : \begin{array}{l} [0\,;1] \to \mathbb{R} \\ x \quad \mapsto 1 \end{array}$ appartient à E, et :

$$\left|\varphi(\mathbb{1})(0)\right| = \left|\int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t,$$

puisque $K(c,t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0\,;1]$.

Par conséquent : $||\varphi(\mathbb{1})||_\infty \geqslant \displaystyle\int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t$, et comme $||\mathbb{1}||_\infty = 1$, alors $|||\varphi||| \geqslant \displaystyle\int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t$.

Comme d'après 1, $|||\varphi||| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left|K(c,t)\right| \mathrm{d}t = \int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t$, on peut conclure que $|||\varphi||| = \displaystyle\int_0^1 K(c,t)\mathrm{d}t$.

3. a) On sait que pour toute partie A de E, l'application $d_A : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x,A) \end{array}$ est continue, et que si A est fermée et $x \notin A$, alors $d(x,A) > 0$.
Ainsi, l'application $g : \begin{array}{l} E \to \quad [-1\,;1] \\ x \mapsto \dfrac{d(x,F_2) - d(x,F_1)}{d(x,F_2) + d(x,F_1)} \end{array}$ est continue,
et $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F_1 \\ -1 & \text{si } x \in F_2 \end{cases}$.

   b) L'application $h : \begin{array}{l} [0\,;1] \to \mathbb{R} \\ \quad t \quad \mapsto K(c,t) \end{array}$ est continue, donc $F_\varepsilon = h^{-1}\big([\varepsilon\,;+\infty[\big)$ et $F_0 = h^{-1}\big(]-\infty\,;0]\big)$ sont deux parties fermées de E, et il est évident que $F_\varepsilon \cap F_0 = \varnothing$.

Alors, pour tout $t \in F_0 \cup F_\varepsilon$: $\quad K(c,t)g_\varepsilon(t) = \big|K(c,t)\big|$,
et si $t \in [0\,;1] \setminus (F_0 \cup F_\varepsilon)$, alors :

$\big|K(c,t)\big| - K(c,t)g_\varepsilon(t) = K(c,t) - K(c,t)g_\varepsilon(t) = K(c,t)\big(1 - g_\varepsilon(t)\big) \leqslant 2\varepsilon.$

Comme $\big|K(c,t)\big| - K(c,t)g_\varepsilon(t) \geqslant 0$, alors :

$$0 \leqslant \int_0^1 \big|K(c,t)\big|\mathrm{d}t - \int_0^1 K(c,t)g_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \leqslant 2\varepsilon,$$

puis : $\quad \varphi(g_\varepsilon)(c) = \displaystyle\int_0^1 K(c,t)g_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \big|K(c,t)\big|\mathrm{d}t - 2\varepsilon.$

Ainsi, $||\varphi(g_\varepsilon)||_\infty \geqslant \displaystyle\int_0^1 \big|K(c,t)\big|\mathrm{d}t - 2\varepsilon$, et comme $||g_\varepsilon||_\infty = 1$,

alors $|||\varphi||| \geqslant ||\varphi(g_\varepsilon)||_\infty \geqslant \displaystyle\int_0^1 \big|K(c,t)\big|\mathrm{d}t - 2\varepsilon$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$.

On en déduit que $|||\varphi||| \geqslant \displaystyle\int_0^1 \big|K(c,t)\big|\mathrm{d}t$, et comme l'inégalité est vraie aussi dans l'autre sens (voir 1), alors $|||\varphi||| = \displaystyle\int_0^1 \big|K(c,t)\big|\mathrm{d}t$.

Exercice (5). Opérateur de Hardy

Soit $E=\left\{f:\ \mathbb{R}_+\to\mathbb{R} \text{ continue telle que } \displaystyle\int_0^{+\infty}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t \text{ converge}\right\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel et que l'application $\begin{array}{rcl}||\cdot||:\ E & \to & \mathbb{R}\\ f & \mapsto & \sqrt{\displaystyle\int_0^{+\infty}\big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t}\end{array}$ est une norme sur E.

2. a) Pour $f\in E$, on définit l'application :

$$Hf:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t & \text{si } x>0\\ f(0) & \text{si } x=0\end{cases}\end{array}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

b) Soient $\varepsilon, A\in]0\,;+\infty[$ tels que $\varepsilon<A$. Montrer que :

$$\int_\varepsilon^A\big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_0^\varepsilon f(t)\mathrm{d}t\Big)^2+2\Big|\int_\varepsilon^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big|,$$

et en déduire que : $\displaystyle\int_0^A\big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t\leqslant 2\Big|\int_0^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big|$.

c) En déduire que : $\displaystyle\int_0^A\big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t\leqslant 4||f||^2$, puis que $Hf\in E$.

d) Montrer que l'application $\begin{array}{rcl}H:\ E & \to & E\\ f & \mapsto & Hf\end{array}$ est linéaire, continue et que $|||H|||\leqslant 2$.

e) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit la fonction

$$f_n:\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & \begin{cases}0 & \text{si } 0\leqslant t\leqslant 1-\frac{1}{n}\\ nt-n+1 & \text{si } 1-\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1\\ t^{-\frac{2n+1}{4n}} & \text{si } t\geqslant 1\end{cases}\end{array}.$$

Montrer que $||f_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2n}$, et que $||Hf_n||_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{8n}$.
En déduire que $|||H|||=2$.

▶ **Corrigé.–**

1. L'application $O\colon \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto 0\end{array}$ est dans E, donc $E \neq \varnothing$.

   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $f, g \in E$:
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|f(t)g(t)\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\Big(\big(f(t)\big)^2 + \big(g(t)\big)^2\Big),$$
   donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t$ converge, et comme :
$$\big(\lambda \cdot f(t) + g(t)\big)^2 = \lambda^2\big(f(t)\big)^2 + \big(g(t)\big)^2 + 2\lambda \cdot f(t)g(t),$$
   alors $\big(\lambda \cdot f(t) + g(t)\big)^2\mathrm{d}t$ converge, donc $\lambda \cdot f + g \in E$.
   Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{R})$.
   Montrons que l'application $\langle\cdot\,,\cdot\rangle\colon \begin{array}{rcl}E \times E & \to & \mathbb{R}\\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t\end{array}$

   est un produit scalaire sur E :
   - Pour tous $f, g \in E$:
$$\langle g\,, f\rangle = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \langle f, g\rangle.$$
   - Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et tous éléments $f, g \in E$:
$$\begin{aligned}\langle \lambda \cdot f + g\,, h\rangle &= \int_0^{+\infty} \big(\lambda \cdot f(t) + g(t)\big)h(t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} f(t)h(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} g(t)h(t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\langle f\,, h\rangle + \langle g\,, h\rangle.\end{aligned}$$
   - Pour tout $f \in E$: $\quad \langle f\,, f\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t \geqslant 0,$

     et si $\langle f\,, f\rangle = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t = 0$, alors l'application croissante sur $\mathbb{R}_+$, $G\colon \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t\end{array}$, est ici constante nulle, donc par dérivation : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \big(f(x)\big)^2 = G'(x) = 0$, donc f est la fonction nulle.

2. a) L'application $F\colon \begin{array}{l}\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t\end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (car f est

continue), donc H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.
De plus, pour tout $x>0$: d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]0\,;x[$ tel que $Hf(x) = \dfrac{F(x)-F(0)}{x} = F'(c_x) = f(c_x)$, qui tend vers $f(0) = Hf(0)$ quand x tend vers 0 (car $0 < c_x < x$ et f est continue en 0), donc Hf est continue au point 0.

b) Soient $\varepsilon, A \in]0\,;+\infty[$ tels que $\varepsilon < A$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^A \big(Hf(t)\big)^2 \mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^A \frac{1}{t^2}\Big(\int_0^t f(u)\mathrm{d}u\Big)^2 \mathrm{d}t \\
&= \Big[-\frac{1}{t}\big(F(t)\big)^2\Big]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A \frac{1}{t}\cdot 2F(t)f(t)\mathrm{d}t \qquad \text{(I.P.P.)} \\
&= -\frac{1}{A}\big(F(A)\big)^2 + \frac{\big(F(\varepsilon)\big)^2}{\varepsilon} + 2\int_\varepsilon^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{\big(F(\varepsilon)\big)^2}{\varepsilon} + 2\Big|\int_\varepsilon^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big|.
\end{aligned}$$

Or : $\dfrac{\big(F(\varepsilon)\big)^2}{\varepsilon} = \dfrac{F(\varepsilon)}{\varepsilon}\cdot F(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} f(0)\cdot 0 = 0$, donc l'inégalité précédente donne, en passant à la limite quand ε tend vers 0, on obtient :

$$\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2 \mathrm{d}t \leqslant 2\Big|\int_0^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big|.$$

c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : pour tout $A>0$,

$$\Big|\int_0^A Hf(t)\cdot f(t)\mathrm{d}t\Big| \leqslant \sqrt{\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t}\cdot\sqrt{\int_0^A \big(f(t)\big)^2\mathrm{d}t},$$

donc $\displaystyle\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t}\cdot ||f||$; si f est non nulle alors Hf est non nulle, donc si f est non nulle, pour A suffisamment grand, $\displaystyle\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t > 0$ puis $\displaystyle\sqrt{\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t} \leqslant 2||f||$,
donc $\displaystyle\int_0^A \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant 4||f||^2$ pour tout réel $A>0$; en passant à la limite quand A tend vers $+\infty$, on obtient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t$ converge (et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(Hf(t)\big)^2\mathrm{d}t \leqslant 4||f||^2$), donc $Hf \in E$.

d) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in E$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$H(\lambda \cdot f + g)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \big(\lambda \cdot f(t) + g(t)\big)\mathrm{d}t = \lambda \cdot \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}_{=Hf(x)} + \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t}_{=Hg(x)},$$

donc $H(\lambda \cdot f + g) = \lambda \cdot f + g$ est H est linéaire.
Comme d'après c), $||Hf|| \leqslant 2||f||$, alors H est continue et $|||H||| \leqslant 2$.

e) Pour tout $t \in [1\,;+\infty[$: $\big(f_n(t)\big)^2 = t^{-1-\frac{1}{n}}$ est l'expression d'une fonction intégrable sur cet intervalle, et comme f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors $f_n \in E$ et on a :

$$\begin{aligned} ||f_n||^2 &= \int_0^{+\infty} \big(f_n(t)\big)^2\mathrm{d}t = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 (nt-n+1)^2\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{-1-\frac{1}{2n}}\mathrm{d}t \\ &= \Big[\frac{1}{3n}(nt-n+1)^3\Big]_{1-\frac{1}{n}}^1 + \Big[\frac{t^{-\frac{1}{2n}}}{\frac{-1}{2n}}\Big]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{3n} - 0 + 2n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n, \end{aligned}$$

donc $||f_n|| \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Ensuite, un calcul rapide donne pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$Hf_n(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leqslant 1-\frac{1}{n} \\ \dfrac{(nx-n+1)^2}{2nx} & \text{si } 1-\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{4n}{2n-1}x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}} - \dfrac{8n^2-2n+1}{2n(2n-1)}\cdot\dfrac{1}{x} & \text{si } x \geqslant 1, \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{aligned} ||Hf_n||^2 &= \int_0^{+\infty} \big(Hf_n(x)\big)^2\mathrm{d}x \\ &= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \frac{(nx-n+1)^4}{4n^2x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \Big(\frac{4n}{2n-1}x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}} - \frac{8n^2-2n+1}{2n(2n-1)x}\Big)^2\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} &\int_1^{+\infty} \Big(\frac{4n}{2n-1}x^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}} - \frac{8n^2-2n+1}{2n(2n-1)}\cdot\frac{1}{x}\Big)^2\mathrm{d}x \\ =&\Big(\frac{4n}{2n-1}\Big)^2 \int_1^{+\infty} x^{-1-\frac{1}{2n}}\mathrm{d}x - 4\cdot\frac{8n^2-2n+1}{(2n-1)^2}\int_1^{+\infty} x^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{4n}}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{8n^2-2n+1}{2n(2n-1)}\right)^2\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

$$=\frac{16n^2}{(2n-1)^2}\cdot 2n-4\cdot\frac{8n^2-2n+1}{(2n-1)^2}\cdot\frac{4n}{2n+1}+\left(\frac{8n^2-2n+1}{2n(2n-1)}\right)^2$$

$$\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{16n^2}{(2n-1)^2}\cdot 2n\underset{n\to+\infty}{\sim}8n,$$

et :

$$0\leqslant\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}\frac{(nx-n+1)^4}{4n^2x^2}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}\int_{1-\frac{1}{n}}^{1}(nx-n+1)^4\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{4(n-1)^2}\left[\frac{(nx-n+1)^5}{5n}\right]_{1-\frac{1}{n}}^{1}$$

$$\leqslant\frac{1}{4(n-1)^2}\cdot\frac{1}{5n}$$

Cette intégrale est donc négligeable devant la précédente quand n tend vers $+\infty$, donc : $\quad ||Hf_n||\underset{n\to+\infty}{\sim}8n$, et ainsi : $\dfrac{||Hf_n||}{||f_n||}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$, donc $|||H|||\geqslant 2$, et comme d'après d), on a aussi $|||H|||\leqslant 2$, alors :

$$|||H|||=2.$$

Exercice (6).

1. Soient $\big(E, ||\cdot||\big)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $\varphi : \ E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue et non nulle ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit $x \in E$.
   a) Montrer que : $\quad \forall h \in \operatorname{Ker}(\varphi), \ \big|\varphi(x)\big| \leqslant |||\varphi||| \cdot ||x-h||,$

   et en déduire que : $\quad d\big(x, \operatorname{Ker}(\varphi)\big) \geqslant \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi|||}.$
   b) Soit $\varepsilon \in]0\,;|||\varphi|||[$. Justifier l'existence d'un élément y de E tel que $||y|| = 1$ et $\big|\varphi(y)\big| > |||\varphi||| - \varepsilon$.

   Montrer que $h = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \cdot y \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, puis

   que $||x-h|| \leqslant \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi||| - \varepsilon}$, et enfin que $d\big(x, \operatorname{Ker}(\varphi)\big) \leqslant \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi|||}$.
   c) En déduire que si $a \in E \setminus \operatorname{Ker}(\varphi)$, alors $|||\varphi||| = \dfrac{\big|\varphi(a)\big|}{d\big(a, \operatorname{Ker}(\varphi)\big)}$.
2. Soit $r \in]-1\,;1[$, soit la forme linéaire $\Psi : \ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & x_n \end{array}$,

   et soit l'application :
   $$Q : \ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} \cdot \Big| \sum_{k=0}^{n} x_k e^{\mathrm{i}k\theta} \Big|^2 \mathrm{d}\theta \end{array}.$$
   a) Montrer que : $\quad \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} = 1 + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} r^j \cos(j\theta).$
   b) En déduire : $\forall X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}), \ Q(X) = {}^{\mathrm{t}}XAX$, avec $A = \big(r^{|i-j|}\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$.
   c) Montrer que $\det(A) = (1-r^2)^n$, puis que Q est une forme quadratique définie positive.

   On note $\langle \cdot\,,\cdot \rangle$ le produit scalaire associé à Q, et $||\cdot||$ la norme associée (qu'on appelle **norme de Toeplitz**).
   d) Soit $g : \ \begin{array}{rcl} \big(\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})\big)^{n+1} & \to & \mathbb{R} \\ (X_0, X_1, \ldots, X_n) & \mapsto & \det\Big(\big(\langle X_i\,, X_j\rangle\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}\Big) \end{array}.$

   Montrer que l'application g est $(n+1)$-linéaire alternée.

   Montrer aussi que, si on note $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique et $p_{\operatorname{Ker}(\varphi)}(e_n)$ le projeté orthogonal de e_n sur $\operatorname{Ker}(\varphi)$, alors :
   $$\begin{aligned} g(e_0, e_1, \ldots, e_n) &= g\big(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n - p_{\operatorname{Ker}(\varphi)}(e_n)\big) \\ &= ||e_n - p_{\operatorname{Ker}(\varphi)}||^2 \cdot g(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}), \end{aligned}$$
   et en déduire que $|||\Psi||| = \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}$.

▶ **Corrigé.**

1. a) Pour tout $h \in \operatorname{Ker}(\varphi)$:

$$\big|\varphi(x)\big| = \big|\varphi(x) - \varphi(h)\big| = \big|\varphi(x-h)\big| \leqslant |||\varphi||| \cdot ||x-h||,$$

donc $||x-h|| \geqslant \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi|||}$, et $d\big(x, \operatorname{Ker}(\varphi)\big) \overset{\text{déf.}}{=} \inf\limits_{h \in \operatorname{Ker}(\varphi)} ||x-h|| \geqslant \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi|||}$.

b) Soit $\varepsilon \in]0\,;|||\varphi|||[$. Par définition, $|||\varphi||| = \inf\limits_{||x||=1} \big|\varphi(x)\big|$, donc il existe $y \in E$ tel que $||y|| = 1$ et $\big|\varphi(y)\big| > |||\varphi||| - \varepsilon$.

Ensuite avec $h = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} \cdot y$: $\quad \varphi(h) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(y)} = 0$

et $||x-h|| = \big|\varphi(x)\big| \cdot \dfrac{||y||}{\big|\varphi(y)\big|} = \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{\big|\varphi(y)\big|} < \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi||| - \varepsilon}$,

donc $d\big(x, \operatorname{Ker}(\varphi)\big) < \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi||| - \varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, et

donc $d\big(x, \operatorname{Ker}(\varphi)\big) \leqslant \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi|||}$.

c) Grâce à a) et b), on conclut que $d\big(x, \operatorname{Ker}(\varphi)\big) = \dfrac{\big|\varphi(x)\big|}{|||\varphi|||}$,

et en particulier pour tout $a \in E \setminus \operatorname{Ker}(\varphi)$: $\quad |||\varphi||| = \dfrac{\big|\varphi(a)\big|}{d\big(a, \operatorname{Ker}(\varphi)\big)}$.

2. a) Soit $r \in]-1\,;1[$, et soit $\theta \in [0\,;2\pi]$:

$$\begin{aligned}\frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(\theta) + 1} &= -1 + \frac{2 - 2r\cos(\theta)}{(1-re^{\mathrm{i}\theta})(1-re^{-\mathrm{i}\theta})} = -1 + \frac{1}{1-re^{\mathrm{i}\theta}} + \frac{1}{1-re^{-\mathrm{i}\theta}} \\ &= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{n\mathrm{i}\theta} + \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{-n\mathrm{i}\theta} = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (e^{n\mathrm{i}\theta} + e^{-n\mathrm{i}\theta}) \\ &= -1 + 2\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta).\end{aligned}$$

b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$:

$$Q(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(1 + 2\sum_{j=1}^{+\infty} r^j \cos(j\theta)\Big) \cdot \Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Or :

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 = \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k e^{-k\mathrm{i}\theta}\Big) = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \leqslant \ell \leqslant n}} e^{\mathrm{i}(\ell-k)\theta} x_k x_\ell$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + \sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} \left(e^{\mathrm{i}(\ell-k)\theta} + e^{-\mathrm{i}(\ell-k)\theta}\right) xkx_\ell$$
$$= \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} \cos\left((\ell-k)\theta\right) x_k x_\ell.$$

On a donc :

$$Q(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 \mathrm{d}\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{+\infty} r^j \cos(j\theta) \cdot \Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Or :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k^2 + 2\sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} \cos\left((\ell-k)\theta\right) x_k x_\ell\Big)\mathrm{d}\theta$$
$$= \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + \frac{1}{\pi}\sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} x_k x_\ell \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\left((\ell-k)\theta\right)\mathrm{d}\theta}_{=0 \text{ car } \ell-k\neq 0}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} x_k^2.$$

Ensuite, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\Big|\cos(j\theta)\Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big| r^j\Big| \leqslant \Big(\sum_{k=0}^{n} |x_k|\Big)^2 |r|^j \leqslant (n+1)^2 ||X||_\infty |r|^j.$$

Comme $|r| \in [0\,;1[$, alors la série géométrique $\sum |r|^j$ converge : par conséquent, la série $\sum \cos(j\theta)\Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 r^j$ converge normalement sur $[0\,;2\pi]$ et on peut intervertir les symboles somme et intégrale. Ainsi :

$$R = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{j=1}^{+\infty} \cos(j\theta)\Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 r^j\Big)\mathrm{d}\theta$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(j\theta)\Big|\sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta}\Big|^2 \mathrm{d}\theta\Big) r^j$$
$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(j\theta)\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k^2 + 2\sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} \cos\left((\ell-k)\theta\right) x_k x_\ell\Big)\mathrm{d}\theta r^j$$

$$= \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} x_k^2 \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(j\theta) \mathrm{d}\theta}_{=0} \Big) r^j$$

$$+ \sum_{j=1}^{+\infty} \Big(2 \sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(j\theta) \cos\big((\ell - k)\theta\big) \mathrm{d}\theta x_k x_\ell \Big) r^j.$$

Or : $\quad \displaystyle\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(j\theta) \cos\big((\ell - k)\theta\big) \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \ell - k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$

d'où : $R = 2 \displaystyle\sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} x_k x_\ell r^{\ell - k}$, puis :

$$Q(X) = \sum_{j=0}^{n} x_j^2 + 2 \sum_{0 \leqslant k < \ell \leqslant n} r^{\ell - k} x_k x_\ell = {}^{\mathrm{t}}XAX.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D_{n+1} = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & r & \cdots & r^n \\ r & 1 & \ddots & r^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r^n & r^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1 - rC_2}{=} \begin{vmatrix} 1 - r^2 & r & \cdots & r^n \\ 0 & 1 & & r^{n-1} \\ 0 & r & \ddots & r^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & r^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (1 - r^2) \begin{vmatrix} 1 & r & \cdots & r^{n-1} \\ r & 1 & \ddots & r^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r^{n-1} & r^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (1 - r^2) D_n$$

$$= \cdots = (1 - r^2)^n D_1 = (1 - r^2)^n.$$

On en déduit que A est inversible ; de plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$:

$$Q(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta) + r^2} \cdot \Big| \sum_{k=0}^{n} x_k e^{k\mathrm{i}\theta} \Big|^2 \mathrm{d}\theta \geqslant 0,$$

donc Q est une forme quadratique définie, positive sur $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, et par conséquent $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

d) L'application g est $(n+1)$-linéaire alternée puisque $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à chacune de ses variables, et puisque l'application déterminant est $(n+1)$-linéaire alternée sur $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.
On a : $g(e_0, e_1, \ldots, e_n) = \det\Big(\big(\langle e_i, e_j \rangle \big)_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} \Big) = \det(A) = (1 - r^2)^n$ car $\langle e_i, e_j \rangle = {}^{\mathrm{t}}e_i A e_j = a_{i,j}$ si on note $A = (a_{i,j})$.

e) Par multilinéarité de g :

$$g(e_0, e_1, \ldots, e_n) = g\big(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n - p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n)\big) + g\big(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n)\big).$$

Or $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$, donc $p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n) \in \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ et comme g est alternée, alors $g\big(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n)\big) = 0$ et $g(e_0, e_1, \ldots, e_n) = g\big(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n - p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n)\big)$.
De plus, comme $e_n - p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n)$ est orthogonal à $\mathrm{Ker}(\varphi)$, alors pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\langle e_k\,, e_n - p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n)\rangle = 0$, et :

$$g\big(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n - p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n)\big) = \det\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & ||e_n - p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}|| \end{pmatrix},$$

avec $B = \big(\langle e_i\,, e_j\rangle\big)_{\substack{0\leqslant i\leqslant n-1\\ 0\leqslant j\leqslant n-1}} = g(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$, de sorte qu'en effet :

$$g(e_0, e_1, \ldots, e_n) = ||e_n - p_{\mathrm{Ker}(\varphi)}(e_n)||^2 \cdot g(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}).$$

f) Comme $g(e_0, e_1, \ldots, e_n) = (1-r^2)^n$ et $g(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}) = (1-r^2)^{n-1}$, alors :

$$\Big(d\big(e_n\,, \mathrm{Ker}(\Psi)\big)\Big)^2 = ||e_n - p_{\mathrm{Ker}(\Psi)}(e_n)||^2 = \frac{g(e_0, e_1, \ldots, e_n)}{g(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})} = 1 - r^2,$$

et en utilisant le résultat de 1.c) :

$$|||\Psi||| = \frac{\big|\Psi(e_n)\big|}{d\big(e_n\,, \mathrm{Ker}(\Psi)\big)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Imprimé en Belgique et achevé sur les presses de SNEL Grafics, Liège
Dépôt légal mars 2022