Groupes et actions de groupes
2 : Classes importantes de groupes.

Références

COMBES, *Algèbre et géométrie.*
FRANCINOU-GIANELLA-NICOLAS, *Oraux X-ENS, algèbre 2.*
GOURDON, *Math en tête - Algèbre*
SKANDALIS, *Algèbre générale et algèbre linéaire.*
ULMER, *Théorie des groupes, cours et exercices.*

Étude de groupes finis importants

Exercice 1 *(Classique et culture ***)*

On note $\mathbb{U}_n$ le sous-groupe de $\mathbb{C}^*$ formé des racines n-ième de l'unité.
Déterminer $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$ pour $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 *(Connaître au moins les plus classiques **)*

Soit $n \geq 2$.

1. (voir [Ulmer] exercice 5.5) Montrer que S_n est engendré par :

a. les transpositions. **b.** les transpositions de la forme $(1\ i)$, $i \geq 2$. **c.** les transpositions de la forme $(i\ i+1)$, $i \leq n-1$. **d.** les permutations $(1\ 2)$ et $(2\ 3 \ldots n)$. **e.** les permutations $(1\ 2)$ et $(1\ 2 \ldots n)$.

2. ([Gourdon] p.24, [Ulmer] chapitre 5) Montrer que le groupe alterné A_n des permutations dites paires est engendré par :

a. les 3-cycles, **b.** les 3-cycles de la forme $(1\ i\ j)$, $i, j \geq 2$.

Exercice 3 *(classique *)*

Soit $n \geq 2$.

1. Décrire les morphismes de S_n dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (penser à la signature et au fait qu'un morphisme est caractérisé par l'image d'un système générateur du groupe de départ)

2. Décrire les morphismes de S_n dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ (idem !)

Exercice 4 *Le groupe des quaternions, voir Ulmer exercice 1.16 et 3.4 (culture et manipulation **)*

On peut montrer qu'à isomorphisme près, il n'y a que 5 groupes d'ordre 8 :
- les trois groupes abéliens $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$,
- le groupe diédral D_4,
- le *groupe des quaternions* $\mathbb{H}_8$, que nous allons étudier dans cet exercice.

On note $\mathbb{H}_8$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par les trois matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

1. Dresser la liste des éléments de $\mathbb{H}_8$.

2. Montrer que $\mathbb{H}_8$ n'est ni abélien ni isomorphe au groupe diédral D_4 (on s'intéressera aux éléments d'ordre 4).

3. Déterminer les sous-groupes, les sous-groupes distingués et les quotients du groupe $\mathbb{H}_8$.

Exercice 5 *les groupes linéaires sur un corps fini (classique et culture *)*
On note $\mathbb{F}_q$ un corps de cardinal q (puissance d'un nombre premier).

1. Quel est le cardinal d'un espace vectoriel de dimension i sur $\mathbb{F}_q$?

2. En déduire que le cardinal du groupe $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_q^n)$ vaut $\Pi_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$.

3. Déterminer $\mathrm{card}(\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^3))$ et montrer que l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^3)$ dont le cardinal est la plus grande puissance de 2 divisant le cardinal de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2^3)$.

4. Déterminer $\mathrm{card}(\mathrm{GL}(\mathbb{F}_3^2))$ et trouver un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_3^2)$ dont le cardinal est la plus grande puissance de 3 divisant le cardinal de $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_3^2)$.

Étude de groupes infinis non géométriques

La structure d'un groupe infini, même abélien, peut être compliquée. Voici quelques exercices classiques sur le groupe additif $\mathbb{Q}$ ([Francinou-Gianella, Oraux X-ENS, Algèbre 1]) et sur les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 *(manipulation *)*

1. Déterminer tous les morphismes du groupe $\mathbb{Q}$ dans le groupe $\mathbb{Z}$.

2. Déterminer tous les morphismes du groupe $\mathbb{Q}$ dans le groupe $\mathbb{Q}^*$.

Exercice 7 *(culture *)*
Montrer que le groupe $\mathbb{Q}$ n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.

Exercice 8 *(classique ***)*
Montrer qu'un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.

Des sous-groupes finis de groupes infinis

Les questions suivantes sont issues de domaines éloignés mais ont pour point commun d'étudier les sous-groupes finis de groupes infinis.

Exercice 9 *Exposant d'un groupe, voir [Gourdon] ex.9 p.26 (développement ***)*
On appelle *exposant* d'un groupe fini G le plus petit entier $e \geq 1$ tel que $x^e = 1$ pour tout $x \in G$ (il existe d'après le théorème de Lagrange).
Soit G un groupe abélien fini d'exposant e.

1. Montrer que si deux éléments a, b de G sont d'ordre premier entre eux, alors $< a > \cap < b >= \{1\}$ (indication : que peut-on dire de l'ordre d'un élément de $< a > \cap < b >$?) et $\mathrm{ordre}(ab) = \mathrm{ordre}(a).\mathrm{ordre}(b)$.

2. Montrer que si deux éléments a, b de G sont d'ordre n et m respectivement, alors G possède un élément d'ordre $\mathrm{ppcm}(n, m)$. Donner un exemple où ab n'est pas d'ordre $\mathrm{ppcm}(n, m)$.

3. En déduire que e est le maximum des ordres des éléments de G et le ppcm des ordres des éléments de G (remarque : certaines références définissent l'exposant d'un groupe par une de ces deux manières, mais ce n'est pas naturel). Indication : trouver un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.

4. Application : montrer que tout sous-groupe fini du groupe multiplicatif d'un corps est cyclique.

5. Que peut-on en déduire pour le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$? pour $\mathbb{C}^*$?

Exercice 10 *Un résultat fondamental ([F-G-N, Oraux X-ENS algèbre 2], ex. 3.17) (classique **)*
Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.
Montrer qu'il existe un produit scalaire b_0 tel que G est un sous-groupe du groupe $\mathrm{O}(b_0)$ des isométries de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, b_0)$.
Indication : prendre un produit scalaire quelconque b et considérer $b_0 = \frac{1}{\mathrm{card}\, G} \sum_{g \in G} g.b$ où $g.b$ désigne la forme bilinéaire définie par $b.g(x, y) = b(g(x), g(y))$.

Conclusion : ce résultat montre qu'étudier les sous-groupes finis de $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ revient à étudier les sous-groupes finis de $O(n)$, ce qui se fait classiquement pour $n = 2$ (exercice suivant) et $n = 3$ (classique à l'agrégation).

Exercice 11 $\mathrm{SO}(2)$, $\mathrm{O}(2)$ *et leurs sous-groupes finis (manipulation et culture ***)*

1. Décrire les éléments de $\mathrm{SO}(2)$ et les éléments de $\mathrm{O}(2)$.

2. Montrer que $\mathrm{SO}(2)$ est isomorphe au sous-groupe $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}^*$ formé des racines de l'unité et au groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

3. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{SO}(2)$ est cyclique.

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{O}(2)$ non inclus dans $\mathrm{SO}(2)$.

4. Montrer que le sous-groupe $H = G \cap \mathrm{SO}(2)$ de G est d'indice 2. En déduire qu'il est distingué.

5. Soit s un élément de $G \setminus H$. Faire la liste des éléments de G et montrer que G est un groupe diédral ou isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Complément 1 : on peut également classer les sous-groupes finis de $\mathrm{SO}(3)$ et de $\mathrm{O}(3)$ (voir par exemple [Ulmer]). On peut montrer qu'il y a deux classes infinies de tels sous-groupes (des groupes cycliques et des groupes diédraux), et un nombre fini de sous-groupes “exceptionnels”, associés aux polyèdres réguliers (leurs groupes de symétrie).

Complément 2 : Le résultat suivant est un développement classique de l'agrégation :
Théorème de Burnside : Si G est sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ d'exposant fini, alors G est fini.
Il est développé dans [Francinou-Gianella-Nicolas, Oraux x-ens, algèbre 2] ex. 3.6. Le résultat est faux pour un groupe quelconque, il existe des groupes infini d'exposant fini.

Étude de groupes géométriques

Exercice 12 *(culture *)*
Donner un groupe infini engendré par deux éléments d'ordre 2.
Indication : penser à un groupe géométrique.

> Dans la suite, si X est une partie d'un espace euclidien (affine ou vectoriel), on note $\mathrm{Is}(X)$ l'ensemble des isométries de l'espace laissant X stable. C'est un sous-groupe du groupe des isométries de l'espace.

Exercice 13 *(manipulation **)*
Dans le plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$, on considère les parties suivantes :

$$A = \mathbb{R}(1,0) \cup \mathbb{R}(0,1),\ B = \{(-1,0),(1,0)\},\ C = \{(\pm 1,0), \pm(1,1)\},\ D = \{(\pm 1, \pm 2)\},\ E = \{(\pm 1, \pm 1)\}.$$

Déterminer les groupes d'isométries $\mathrm{Is}(A)$, $\mathrm{Is}(B)$, $\mathrm{Is}(C)$, $\mathrm{Is}(D)$, $\mathrm{Is}(E)$.

Exercice 14 *Le groupe du tétraèdre (classique et culture ***)*
On considère un tétraèdre régulier T de sommets A, B, C, Q dans l'espace affine euclidien de dimension 3, au sens où T est l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(\{A,B,C,D\})$ des quatre sommets.

Attention, le tétraèdre régulier est un objet classique mais il faut savoir en justifier l'existence (comment faites-vous ?). Attention également, l'expression “l'espace euclidien de dimension 3” est abusive mais sans conséquence car tous les espaces affines euclidiens de dimension 3 sont isomorphes. On pourrait en préciser un, par exemple $\mathbb{R}^3$ muni de ses structures standards.

On note $X = \{A,B,C,D\}$ et G le groupe $\mathrm{Is}(T)$ des isométries du tétraèdre.

1. Montrer que $\mathrm{Is}(T) = \mathrm{Is}(X)$. En déduire un morphisme ϕ de $\mathrm{Is}(T)$ dans S_4 et montrer que ce morphisme est injectif.

2. Montrer que toutes les transpositions de S_4 sont images par ϕ d'éléments de $\mathrm{Is}(T)$ et en déduire que ϕ est un isomorphisme.

3. Identifier les isométries de $\mathrm{Is}(T)$ correspondant aux éléments de A_4.

On note Y l'ensemble des bi-médianes de T, c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par les milieux de deux côtés opposés de T.

4. Montrer que $\mathrm{Is}\,(T)$ agit sur Y et en déduire un morphisme de S_4 dans S_3. Quel est son noyau ?

Remarque : ce morphisme est exceptionnel, les morphismes de S_n dans S_m, $m < n$, sont en général réduits au morphisme trivial ou à la signature. Il correspond au fait que A_4 possède un sous-groupe distingué non trivial.

5. (conjugaison) Soit T' est un tétraèdre régulier de l'espace affine. On admet qu'il existe une application affine (une similitude) g envoyant T sur T'. Quel est le lien entre $\mathrm{Is}\,(T)$ et $\mathrm{Is}\,(T')$?

Complément : On peut également déterminer le groupe des isométries du cube. On peut montrer que le groupe des isométries directes du cube est isomorphe à S_4, il est d'indice deux dans le groupe complet des isométries du cube. Il est facile de voir le groupe des isométries comme sous-groupe de S_8 (permutations des sommets) ou de S_6 (permutations des faces). Sur quel ensemble géométrique à 4 éléments le groupe des isométries du cube agit-il ?