Institut Fourier - Université Grenoble Alpes 2021-2022

Préparation à l'agrégation interne

Compléments d'algèbre et de géométrie

I. Préambules sur les espaces affines et la convexité.

Soit E un espace vectoriel réel. On appelle sous-espace affine de E toute partie de E de la forme

$$a + F = \{a + x,\ x \in F\}$$

avec $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E. Dans ce problème, l'ensemble vide n'est donc pas un sous-espace affine de E.

Une partie C de E est dite *convexe* si pour tout $x, y \in C$, le segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]\}$ est contenu dans C. L'intersection d'une famille de convexes étant convexe, on appelle *enveloppe convexe* d'une partie A de E l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A. C'est donc, pour l'inclusion, le plus petit convexe de E contenant A. On le note $\mathrm{Conv}\,(A)$.

On dit qu'une partie C de E est un *cône (de centre 0)* si pour tout $x \in C$, la demi-droite $\mathbb{R}_+ x = \{tx,\ t \geq 0\}$ est contenu dans C. L'intersection d'une famille de cônes étant un cône, on appelle *enveloppe conique* d'une partie A de E l'intersection de tous les cônes (de centre 0) de E contenant A. C'est donc, pour l'inclusion, le plus petit cône (de centre 0) de E contenant A. On le note $\mathrm{Cone}\,(A)$.

Si $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_k \in E$, $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, on dit que $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ est :

— une *combinaison barycentrique* de $a_1, \ldots, a_k$ si $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$,

— une *combinaison vectorielle* de $a_1, \ldots, a_k$ si $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 0$,

— une *combinaison convexe* de $a_1, \ldots, a_k$ si $\lambda_1 + ... + \lambda_k = 1$ et pour tout $i = 1, ..., k$, $\lambda_i \geq 0$,

— une *combinaison convexe conique* de $a_1, \ldots, a_k$ si pour tout $i = 1, ..., k$, $\lambda_i \geq 0$.

1. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E. Montrer qu'il existe un unique sous-espace vectoriel F de E tel que pour tout $x \in \mathcal{F}$, on a $\mathcal{F} = x + F$. On appelle F l'espace vectoriel directeur de $\mathcal{F}$.
2. Montrer que l'intersection d'une famille de sous-espaces affines de E est soit vide, soit un sous-espace affine de E. Dans ce dernier cas, que peut-on dire de son espace vectoriel directeur ?
3. Soit A une partie de E. Montrer qu'il existe (pour l'inclusion) un plus petit sous-espace affine de E contenant A. On le note $\mathrm{Aff}\,(A)$.
4. Soient $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E et $a_1, ..., a_k \in \mathcal{F}$. Montrer que toute combinaison barycentrique de $a_1, \ldots, a_k$ est un élément de $\mathcal{F}$. Que peut-on dire d'une combinaison vectorielle de $a_1, \ldots, a_k$?
5. Soit $A \subset E$. Montrer que $\mathrm{Aff}\,(A)$ est l'ensemble des combinaisons barycentriques d'éléments de A. Si $A = \{a_1, ..., a_k\}$, montrer que l'espace vectoriel directeur de $\mathrm{Aff}\,(A)$ est engendré par la famille $(a_2 - a_1, ..., a_k - a_1)$.
6. Soit $A \subset E$. Montrer que A est convexe si et seulement si pour tout $a_1, ..., a_k \in A$, toute combinaison convexe de $a_1, ..., a_k$ est un élément de A.
7. Soit $A \subset E$. Montrer que $\mathrm{Conv}\,(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.
8. Soit $A \subset E$. Montrer que $\mathrm{Conv}\,(\mathrm{Cone}\,(A)) = \mathrm{Cone}\,(\mathrm{Conv}\,(A))$ et que c'est l'ensemble des combinaisons convexes coniques d'éléments de A.

II. Lemme de Farkas et optimisation (inspiré de X-ENS 2020).

Notations et Définitions

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on désignera le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^k$ par $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^k$ par $\|\cdot\|$.

Dans tout le sujet, on se place sur $\mathbb{R}^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, muni de la norme euclidienne.

A. Inégalité de convexité et identité du parallélogramme.

1. Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$. Montrer que $||u+v|| = ||u|| + ||v||$ si et seulement si u et v sont positivement liés, c'est-à-dire il existe $\lambda \geq 0$ tel que $u = \lambda v$.
2. Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \neq v$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$\forall t \in [0,1],\ ||tu + (1-t)v - x|| \leq t||u-x|| + (1-t)||v-x||$$
et qu'il y a égalité si et seulement si $t = 0$ ou $t = 1$ ou $x \in \mathrm{Aff}\,(u,v) \backslash]u,v[$.
3. Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u \neq v$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:
$$\forall t \in [0,1],\ ||tu + (1-t)v - x||^2 \leq t||u-x||^2 + (1-t)||v-x||^2$$
et qu'il y a égalité si et seulement si $t = 0$ ou $t = 1$. *Indication : étudier la convexité de l'application* $t \mapsto ||tu + (1-t)v - x||^2$.
4. (Identité du parallélogramme) Soit $u, v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :
$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

B. Projection sur un convexe fermé et hyperplan séparateur.

Soient C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

5. Montrer qu'il existe un unique point $P_C(x) \in C$ tel que $||P_C(x) - x|| = \inf_{y \in C} ||y - x||$. *Indication : pour l'unicité, on pourra utiliser les questions de la partie précédente.*
6. Soit $\overline{x} \in C$. Montrer que $\overline{x} = P_C(x)$ si et seulement si
$$\forall y \in C,\ \langle x - \overline{x}, y - \overline{x} \rangle \leq 0$$
Indication : on pourra considérer la fonction $\psi_y : t \in \mathbb{R} \mapsto ||x - (\overline{x} + t(y - \overline{x}))||^2$ *où* $y \in C$.
7. En déduire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $||P_C(y) - P_C(x)|| \leq ||y - x||$.
8. Montrer que pour tout $y \in C$, $||y - P_C(x)|| \leq ||y - x||$.
9. Soit $u = (u_1, ..., u_n) \notin C$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine H de $\mathbb{R}^n$ d'équation $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ tel que $a_1u_1 + ... + a_nu_n > b$ et pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in C$, $a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b$.

Le convexe C est contenu dans un demi-espace séparé par l'hyperplan H et le point u est contenu dans l'autre demi-espace séparé par l'hyperplan H. On dit que H est un **hyperplan séparateur** *de C et x.*

On suppose désormais que C est un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Soit $R > 0$ tel que C est inclus dans la boule ouverte $B(0,R)$ de $\mathbb{R}^n$. Soit $u = (u_1, ..., u_n) \in \partial C = C \setminus \mathring{C}$.

10. Soit $\epsilon > 0$.
    (a) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n \setminus C$ tel que $||u - P_C(v)|| < \epsilon$. On choisit un tel v.
    (b) Montrer que la demi-droite affine $[P_C(v), v) = P_C(v) + \mathbb{R}_+(v - P_C(v))$ rencontre la sphère $S(0,R)$ en exactement un point w et que $P_C(v) = P_C(w)$.
11. En déduire que $P_C(S(0,R)) = \partial C$.
12. Montrer qu'il existe un hyperplan affine H de $\mathbb{R}^n$ d'équation $a_1x_1 + ... + a_nx_n = b$ tel que $a_1u_1 + ... + a_nu_n = b$ et pour tout $x = (x_1, ..., x_n) \in C$, $a_1x_1 + ... + a_nx_n \leq b$.

Le convexe C est contenu dans un demi-espace séparé par l'hyperplan H et le point u est dans l'hyperplan H. On dit que H est un **hyperplan d'appui** *à C en x.*

C. Lemme de Farkas

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_m)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note C l'enveloppe convexe conique de $u_1, \ldots, u_m$, c'est-à-dire :

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i \mid \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket \ \mu_i \geq 0 \right\}.$$

13. Le but de cette question est de montrer que C est un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$.
    (a) Montrer que C est convexe.
    (b) Montrer que si $(u_1, \ldots, u_m)$ est une famille libre, alors C est fermé.
    (c) Soient $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille liée de $\mathbb{R}^n$ et x une combinaison convexe conique de $v_1, \ldots, v_k$. Montrer que x est combinaison convexe conique de $k-1$ vecteurs parmi $v_1, \ldots, v_k$.
    (d) Pour tout $I \subset \llbracket 1, m \rrbracket$, on pose $C_I = \left\{ \sum_{i \in I} \mu_i u_i, \ \forall i \in I \ \mu_i \geq 0 \right\}$. Montrer que

    $$C = \bigcup_I C_I$$

    où l'union est prise sur les ensembles $I \subset \llbracket 1, m \rrbracket$ tels que $(u_i)_{i \in I}$ est une famille libre. En déduire que C est fermé.

On veut démonter le résultat suivant :

Lemme de Farkas *Si $v \in \mathbb{R}^n$, alors une et une seule des deux assertions suivantes est vérifiée :*

(i) $v \in C$,

(ii) il existe $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle v, w \rangle < 0$ et $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\langle u_i, w \rangle \geq 0$.

14. On considère un vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus C$.
    (a) Montrer que $\langle P_C(v), P_C(v) - v \rangle = 0$.
    (b) On pose $w = P_c(v) - v$. Montrer que $\langle v, w \rangle < 0$ et $\langle u_i, w \rangle \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.
15. Conclure la preuve du lemme de Farkas.

III. Théorème de Carathéodory, groupe orthogonal et boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ (d'après Mines-Ponts 2013 MP2)

Notations et définitions.

Soit E un espace vectoriel euclidien (préhilbertien réel de dimension finie). On note $\langle , \rangle$ le produit scalaire de E et $||.||$ la norme euclidienne associée.

Si H est une partie de E, on appelle enveloppe convexe de H, notée $\mathrm{Conv}\,(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H, c'est-à-dire l'intersection de tous les convexes de E contenant H.

Si H est une partie convexe de E, un élément x de H est dit *extrémal* (dans H) si pour tout $a, b \in H$, si $x \in [a, b]$, alors $x = a$ ou $x = b$.

Soit n un entier naturel ≥ 2. On désigne par $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et si $A \in M_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A. On rappelle que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $U^tU = I$. On rappelle également qu'une matrice symétrique réelle est dite positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $M_{n,1}(\mathbb{R})$. On munit chacun d'eux du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $||.||_2$ la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$: pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$,

$$||A||_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, \ ||X||=1} \frac{||AX||}{||X||}.$$

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Projeté sur un convexe

Soit H une partie de E non vide, fermée et convexe. Soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf\{||x - h||,\ h \in H\}.$$

1. Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = ||h - h_0||$. *Indication : pour l'unicité, on pourra utiliser l'égalité du parallélogramme.*
2. Montrer que h_0 est l'élément de H caractérisé par la condition :

$$\forall h \in H,\ \langle x - h_0 | h - h_0 \rangle \leq 0.$$

Indication : on pourra utiliser la fonction $q : t \mapsto ||th_0 + (1-t)h - x||^2$ *définie sur* $\mathbb{R}$.

Le vecteur h_0 s'appelle le projeté de x sur H.

B. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n. On dit que $x \in E$ est une *combinaison convexe* des p éléments $x_1, x_2, ..., x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ positifs ou nuls tels que $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$ et $\lambda_1 + ... + \lambda_p = 1$.

3. Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H.

On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
Soit $x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p$ une combinaison convexe de $x_1, x_2, ..., x_p \in H$ avec $p \geq n+2$.

4. Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, ..., \mu_p$ tels que $\mu_1 x_1 + ... + \mu_p x_p = 0$ et $\mu_1 + ... + \mu_p = 0$. *Indication : on pourra considérer la famille* $(x_2 - x_1, ..., x_p - x_1)$.
5. En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p+1$ éléments de H, puis conclure que $\mathrm{Conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H.
6. Application : si H est une partie compacte de E, montrer que $\mathrm{Conv}(H)$ est compacte. *Indication : On pourra montrer que* $\mathrm{Conv}(H)$ *est l'image d'un compact par une application continue. On rappelle qu'un produit fini d'espaces métriques compacts est compact.*

C. Enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et points extrémaux de la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$.

7. Montrer que l'enveloppe convexe $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ est compacte.
   On note $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $(M_n(\mathbb{R}), ||.||_2)$. C'est une partie convexe de $M_n(\mathbb{R})$.
8. Montrer que $\mathrm{Conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans $\mathcal{B}$.
9. Soit $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $U = \frac{V+W}{2}$ avec $V, W \in \mathcal{B}$, alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, on a $||VX|| = ||WX|| = ||X||$ et UX et VX sont positivement liés. En déduire que U est extrémal dans $\mathcal{B}$.

D. Décomposition polaire.

Soit f un endomorphisme de E. On note A la matrice de f dans une base orthonormée de E, et on note f^* l'adjoint de f.

10. Montrer que ${}^tAA$ est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $||A||_2$ en fonction des valeurs propres de ${}^tAA$.
11. Montrer qu'il existe un endomorphisme auto-adjoint positif h de E tel que $f^* \circ f = h^2$.
12. Montrer que la restriction de h à $\mathrm{Im}\, h$ induit un automorphisme de $\mathrm{Im}\, h$. On notera $\tilde{h}$ cet automorphisme.
13. Montrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$. En déduire que $\mathrm{Ker}\, h$ et $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\mathrm{Ker}\, h$ sur $(\mathrm{Im}\, f)^\perp$ qui conserve la norme.
14. À l'aide de $\tilde{h}$ et v, construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.
15. En déduire que toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive.

Remarque : si A est inversible, cette écriture est unique. La décomposition polaire permet de montrer que l'enveloppe convexe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est exactement la boule unité de* $(M_n(\mathbb{R}), ||.||_2)$.

IV. Étude d'une conique

Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y - 1 = 0.$$

On lui associe les deux formes quadratiques sur les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ suivantes :

$$q : (x, y) \mapsto x^2 - 6xy + y^2$$
$$Q : (x, y, z) \mapsto x^2 - 6xy + y^2 + 6xz - 2yz - z^2$$

(la forme Q est obtenue en *homogénéisant* au degré 2 l'équation de $\mathcal{C}$ à l'aide de la variable z.)

A. Étude affine de la conique.

1. Montrer que l'application affine $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $i(x, y) = (x, y, 1)$ envoie bijectivement le plan affine $\mathbb{R}^2$ sur le plan affine d'équation $z = 1$ dans $\mathbb{R}^3$ et envoie bijectivement $\mathcal{C}$ sur l'intersection du cône isotrope de Q et du plan affine d'équation $z = 1$ dans $\mathbb{R}^3$. Quel lien peut-on faire entre q et Q ?
2. Orthogonaliser la forme quadratique q à l'aide du procédé de Gauss. Quelle peut-être la nature de la conique $\mathcal{C}$?
3. Orthogonaliser la forme quadratique Q à l'aide du procédé de Gauss et préciser la nature de la conique $\mathcal{C}$.

B. Étude métrique de la conique.

On munit désormais le plan affine $\mathbb{R}^2$ de la structure euclidienne induite par le produit scalaire usuel.

4. Déterminer un repère orthonormé de $\mathbb{R}^2$ dans lequel l'équation de la conique $\mathcal{C}$ est de la forme

$$\frac{X^2}{a^2} \pm \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

(forme réduite de l'équation de la conique).