1^{er} novembre 2021

Exemples d'étude et de résolution de systèmes différentiels linéaires (Leçon 429)

Exercice (1).
On considère dans $\mathbb{R}^2$, le système différentiel :

$$(\mathcal{H}):\quad \left\{\begin{array}{rclcl} x'(t) & = & t\cdot x(t) & - & y(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & t\cdot y(t) \end{array}\right. ,$$

où x et y sont des fonctions réelles de la variable réelle t.

1. Résoudre le problème de Cauchy aux conditions initiales (x_0, y_0) en $t_0 = 0$.

   On pourra poser : $z = x + \mathrm{i}\cdot y$.

2. Même question pour le système différentiel suivant :

$$(\mathcal{S}):\quad \left\{\begin{array}{rclclclcl} x'(t) & = & t\cdot x(t) & - & y(t) & + & t\cdot\cos(t) & - & t^3\cdot\sin(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & t\cdot y(t) & + & t\cdot\sin(t) & + & t^3\cdot\cos(t) \end{array}\right. .$$

▶ **Corrigé.–**

1. On pose $z = x + \mathrm{i}\cdot y$, alors pour tout réel t :

$$\begin{aligned} z'(t) = x'(t) + \mathrm{i}y'(t) &= t\cdot x(t) - y(t) + \mathrm{i}\cdot\big(x(t) + t\cdot y(t)\big) \\ &= t\cdot\big(x(t) + \mathrm{i}\cdot y(t)\big) + \mathrm{i}\cdot\big(x(t) + \mathrm{i}\cdot y(t)\big) \\ &= t\cdot z(t) + \mathrm{i}\cdot z(t) = (t+\mathrm{i})\cdot z(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où :}\quad z(t) &= \lambda \cdot e^{\frac{t^2}{2}+\mathrm{i}\cdot t} \qquad \text{on pose } \lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta \text{ avec } \alpha,\ \beta\in\mathbb{R} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}\cdot(\alpha+\mathrm{i}\beta)\cdot\big(\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t)\big) \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\Big(\alpha\cos(t)-\beta\sin(t)+\mathrm{i}\cdot\big(\alpha\sin(t)+\beta\cos(t)\big)\Big), \end{aligned}$$

d'où : $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) = e^{\frac{t^2}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha\cdot(t)-\beta\sin(t) \\ \alpha\sin(t)+\beta\cos(t) \end{pmatrix} = \alpha\cdot X_1(t)+\beta\cdot X_2(t)$,

avec $X_1(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ et $X_2(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$.

Enfin, $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, et donc :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = x_0 e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} + y_0 e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}.$$

2. Pour tout réel t :

$\begin{pmatrix}x'(t)\\ y'(t)\end{pmatrix} = A(t)\cdot X(t)+B(t)$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t\end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t)-t^3\sin(t) \\ t\sin(t)+t^3\cos(t)\end{pmatrix}$.

D'après 1, $M(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale pour le système homogène $(\mathcal{H})$.

On utilise la méthode de variation de la constante :

soit $X_p(t) = M(t)\cdot\lambda(t)$ où $\lambda(t) = \begin{pmatrix}\lambda_1(t)\\ \lambda_2(t)\end{pmatrix}$ avec λ_1 et λ_2 de classe $\mathcal{C}^1$,

on a alors :

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= M'(t)\lambda(t)+M(t)\lambda'(t) \\ &= A\cdot M(t)\lambda(t)+M(t)\lambda'(t) = A\cdot X(t)+M(t)\lambda'(t) \end{aligned}$$

d'où : $\quad M(t)\lambda'(t) = B(t)$, puis $\lambda'(t) = \big(M(t)\big)^{-1}\cdot B(t)$, soit :

$$\begin{pmatrix}\lambda_1'(t)\\ \lambda_2'(t)\end{pmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t) & \sin(t)\\ -\sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} t\cos(t)-t^3\sin(t) \\ t\sin(t)+t^3\cos(t)\end{pmatrix} = e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}t\\ t^3\end{pmatrix}.$$

Donc : $\begin{cases}\lambda_1'(t) &= t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \\ \lambda_2'(t) &= t^3\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\end{cases}$. On choisit $\lambda_1(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}}$, et on a :

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) &= \int t^3\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = -t^2\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} + 2\int t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{(I.P.P.)} \\ & -t^2\cdot e^{-\frac{t^2}{2}} - 2e^{-\frac{t^2}{2}} = -e^{-\frac{t^2}{2}}(t^2+2). \end{aligned}$$

D'où :

$$X_p(t) = M(t)\cdot\lambda(t) = e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t) & -\sin(t)\\ \sin(t) & \cos(t)\end{pmatrix}\times e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 2+t^2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-\cos(t)-(t^2+2)\sin(t)\\ -\sin(t)+(t^2+2)\cos(t)\end{pmatrix},$$

et : $\quad X(t) = X_{\mathcal{H}}(t) + X_p(t)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\big(\alpha\cos(t)-\beta\sin(t)\big)-\cos(t)-(t^2+2)\sin(t)\\ e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\big(\alpha\sin(t)+\beta\cos(t)\big)-\sin(t)+(t^2+2)\cos(t)\end{pmatrix}.$$

Enfin, $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha-1\\ \beta+2\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0+1\\ y_0-2\end{pmatrix}$, et la solution cherchée est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\big((x_0-1)\cos(t)-(y_0+2)\sin(t)\big)-\cos(t)-(t^2+2)\sin(t)\\ e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\big((x_0-1)\sin(t)+(y_0+2)\cos(t)\big)-\sin(t)+(t^2+2)\cos(t)\end{pmatrix}.$$

Exercice (2).

1. Résoudre le système différentiel :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} x_1'(t) = 6x_1(t) + 9x_2(t) - 9x_3(t) + e^{3t}\\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 3x_2(t) - 2e^{3t}\\ x_3'(t) = 3x_1(t) + 3x_2(t) + 2e^{3t}\end{cases}.$$

2. Résoudre le système différentiel :

$$(\mathcal{S}') : \begin{cases} x''(t) = x'(t) + y'(t) - y(t)\\ y''(t) = x'(t) + y'(t) - x(t)\end{cases}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. Le système différentiel étudié se réécrit : $X'(t) = AX(t) + B(t)$,
   où $X(t) = \begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}6 & 9 & -9\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ et $B(t) = e^{3t}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}$.
   Le polynôme caractéristique de la matrice A est défini par :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}6-\lambda & 9 & -9\\ 2 & 3-\lambda & 0\\ 3 & 3 & -\lambda\end{vmatrix} \overset{C_3\leftarrow C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix}6-\lambda & 9 & 0\\ 2 & 3-\lambda & 3-\lambda\\ 3 & 3 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{=} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 9 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 9 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = -(\lambda-3)^3,$$

donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton : $\quad (A - 3I_3)^3 = 0$.
On en déduit qu'en posant $NB = A - 3I$, on obtient la décomposition de Dunford $A = 3I_3 + N$, donc pour tout réel t :

$$e^{t \cdot A} = e^{3tI_3 + tN} = e^{3t} \cdot e^{t \cdot N} = e^{3t} \cdot (I_3 + t \cdot N + \tfrac{t^2}{2} \cdot N^2)$$
$$= e^{3t} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \tfrac{t^2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \right)$$
$$= e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1+3t & 9t & -9t \\ 2t+3t^2 & 1+9t^2 & -9t^2 \\ 3t+3t^2 & 3t+9t^2 & 1-2t-9t^2 \end{pmatrix}.$$

On sait que le système homogène associé $(\mathcal{H})$: $X'(t) = AX(t)$ a pour ensemble-solution $\left\{ e^{t \cdot A} C \, ; \; C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \right\}$.

Pour résoudre le système $(\mathcal{S})$, on applique la méthode de variation des constantes, en posant $X(t) = e^{t \cdot A} C(t)$, ce qui entraîne :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X'(t) = Ae^{t \cdot A} C(t) + e^{t \cdot A} C'(t) = AX(t) + e^{t \cdot A} C'(t)$$
$$\Leftrightarrow B(t) = X'(t) - AX(t) = e^{t \cdot A} C'(t),$$

soit :

$$C'(t) = e^{-t \cdot A} B(t) = \begin{pmatrix} 1-3t & -9t & 9t \\ -2t+3t^2 & 1+9t^2 & -9t^2 \\ -3t+3t^2 & -3t+9t^2 & 1+3t-9t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+33t \\ -2-2t-33t^2 \\ 2+9t-33t^2 \end{pmatrix},$$

donc $C(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{33}{2}t^2 + c_1 \\ -2t - t^2 - 11t^3 + c_2 \\ 2t + \frac{9}{2}t^2 - 11t^3 + c_3 \end{pmatrix}$, et ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X(t) = e^{t \cdot A} C(t) = e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1+3t & 9t & -9t \\ 2t+3t^2 & 1+9t^2 & -9t^2 \\ 3t+3t^2 & 3t+9t^2 & 1-3t-9t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - \frac{33}{2}t^2 + c_1 \\ -2t - t^2 - 11t^3 + c_2 \\ 2t + \frac{9}{2}t^2 - 11t^3 + c_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{33}{2}t^2 + (1 + 3c_1 + 9c_2 - 9c_3)t + c_1 \\ -11t^3 + (1 + 3c_1 + 9c_2 - 9c_3)t^2 + (-2 + 2c_1)t + c_2 \\ -11t^3 + (-\frac{9}{2} + 3c_1 + 9c_2 - 9c_3)t^2 + (2 + 3c_1 + 3c_2 - 3c_3)t + c_3 \end{pmatrix}.$$

2. On pose : $\begin{cases} u &= x+y \\ v &= x-y \end{cases}$, le système $(\mathcal{S}')$ est alors équivalent à :

$$\begin{cases} u'' - 2u' + u &= 0 \\ v'' + v &= 0 \end{cases},$$

donc il existe a, b, c, d des réels tels que pour tout réel t :

$$\begin{cases} u(t) &= ae^t + bte^t \\ v(t) &= c\cos(t) + d\sin(t) \end{cases},$$

et donc il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) &= \alpha e^t + \beta te^t + \gamma\cos(t) + \delta\sin(t) \\ y(t) &= \alpha e^t + \beta te^t - \gamma\cos(t) - \delta\sin(t) \end{cases}.$$

Exercice (3).

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable, et soient $\lambda_1, \ldots; \lambda_r$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.
   a) Déterminer un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $r-1$ tel que :
   $$\forall i \in \{1, 2, \ldots, r\}, \quad Q(\lambda_i) = e^{\lambda_i}.$$
   b) En déduire que $\exp(A) = Q(A)$.
2. a) Résoudre le système différentiel :
   $$(\mathcal{H}) : \quad X'(t) = AX(t) \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & (b) & \\ & & \ddots & \\ & (b) & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix},$$
   avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
   b) Résoudre le système différentiel :
   $$X'(t) = AX(t) + B(t) \quad \text{où } B(t) = nbe^{t(b-a)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

▶ **Corrigé.–**

1. a) Le polynôme cherché est obtenu grâce aux polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$Q = \sum_{k=1}^{r} e^{\lambda_k} \cdot L_k \text{ où } L_k = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ i \neq k}} \frac{X - \lambda_i}{\lambda_k - \lambda_i}.$$

En effet, on sait que pour tous entiers $k, i \in \{1, 2, \ldots, r\}$:
$L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases}$, donc $Q(\lambda_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{\lambda_k} \cdot L_k(\lambda_i) = e^{\lambda_i} \cdot 1 = e^{\lambda_i}$.

b) Puisque A est supposée diagonalisable, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \vdots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$, et où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (pas forcément distinctes). On a alors :

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(PDP^{-1})^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{PD^nP^{-1}}{n!} = P\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D^n}{n!}\Big)P^{-1} \\ &= Pe^DP^{-1} = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \vdots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & & \\ & Q(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

En notant explicitement $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{N} b_i X^i$ avec $(b_i)_{0 \leqslant i \leqslant N}$ les coefficients de Q, on peut alors poursuivre le calcul :

$$\exp(A) = P \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{N} b_i \lambda_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=0}^{N} b_i \lambda_n^i \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= P\times\Big(\sum_{i=0}^{N} b_i \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^i \end{pmatrix}\Big)\times P^{-1}$$

$$= P\times Q(D)\times P^{-1} = P\Big(\sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot D^i\Big)P^{-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot PD^iP^{-1} = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot (PDP^{-1})^i$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \lambda_i \cdot A^i = Q(A).$$

2. a) On remarque que : $A-(a-b)\cdot I_n = b\cdot J_n$ où J_n est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ($n \geqslant 2$).
On sait que : $\mathrm{rg}(J_n)=1$, donc $\dim \mathrm{Ker}\big(A-(a-b)\cdot I_n\big) = n-1$, ce qui prouve que $a-b$ est valeur propre de A, de multiplicité $n-1$.
La dernière valeur propre λ vérifie : $\lambda+(n-1)(a-b)=\mathrm{tr}(A)$, soit : $\lambda+(n-1)(a-b)=na \Leftrightarrow \lambda = a+(n-1)b$, valeur propre simple de A.
La matrice A admet donc exactement deux valeurs propres :$(a-b)$ de multiplicité $(n-1$, et $a+(n-1)b$ de multiplicité 1. Il existe donc $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PDP^{-1} \quad \text{où} \quad D = \begin{pmatrix} a-b & & & & \\ & a-b & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a-b & \\ & & & & a+(n-1)b \end{pmatrix}.$$

Ainsi pour tout réel non nul t, la matrice $t\cdot A$ est diagonalisable et ses valeurs propres sont $t(a-b)$ et $t\big(a+(n-1)b\big)$. En notant $\lambda_1 = a-b$ et $\lambda_2 = a+(n-1)b$, on a alors d'après 1.b) :

$$e^{t\cdot A} = Q(t\cdot A) \quad \text{où } Q = e^{t\lambda_1}\cdot\frac{X-t\lambda_2}{t\lambda_1-t\lambda_2} + e^{t\lambda_2}\cdot\frac{X-t\lambda_1}{t\lambda_2-t\lambda_1}$$

$$= e^{t\lambda_1}\cdot\frac{t\cdot A-t\lambda_2\cdot I_n}{t(\lambda_1-\lambda_2)} + e^{t\lambda_2}\cdot\frac{t\cdot A-t\lambda_1\cdot I_n}{t(\lambda_2-\lambda_1)}$$

$$= e^{t\lambda_1}\cdot\frac{A-\lambda_2\cdot I_n}{\lambda_1-\lambda_2} + e^{t\lambda_2}\cdot\frac{A-\lambda_1\cdot I_n}{\lambda_2-\lambda_1}.$$

Or, $A-\lambda_1\cdot I_n = A-(a-b)\cdot I_n = b\cdot J_n$, et :

$$A-\lambda_2\cdot I_n = A-\big(a+(n-1)b\big)\cdot I_n = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix} = J_n - n\cdot I_n.$$

Comme de plus, $\lambda_2-\lambda_1 = nb$, alors :

$$e^{t\cdot A} = -\frac{1}{n}e^{t\lambda_1}\cdot(J_n-n\cdot I_n)+\frac{1}{n}e^{t\lambda_2}\cdot J_n.$$

On applique alors la méthode de variation de la constante, en posant $X(t) = e^{t\cdot A}\times C(t)$, où $C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ \vdots \\ C_n(t) \end{pmatrix}$.

On a alors : $C'(t) = e^{-t\cdot A}\times B(t)$. Donc : (Que veux-tu dire par : "voir notes de cours" ?)

$$C'(t) = \Big(\frac{-1}{n}e^{t\lambda_1}\cdot(J_n-n\cdot I_n)+\frac{1}{n}e^{t\lambda_2}\cdot J_n\Big)\times nbe^{-t\lambda_1}\cdot J_n\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{-b\,(J_n-n\cdot I_n)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{=0} + be^{t(\lambda_2-\lambda_1)}\cdot J\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = be^{tnb}\cdot n\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On choisit $C(t) = e^{tnb}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et alors :

$$X_p(t) = e^{t\cdot A}\times e^{tnb}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ \text{ et } X(t) = X_{\mathcal{H}}(t)+X_p(t) = e^{t\cdot A}\Big(C+e^{tnb}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\Big),$$

avec $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Il semble que ce n'est pas tout à fait fini ?

Exercice (4).

Soient les fonctions :

$$I:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\cos(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\end{array} \quad \text{et} \quad J:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\sin(tx)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\end{array}.$$

1. Justifier que les fonctions I et J sont bien définies.
2. Montrer que I et J sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et montrer que pour tout réel x :
$$\begin{cases} xI'(x) & = J'(x)-\dfrac{1}{2}I_(x) \\ \quad\text{et} & \\ xJ'(x) & = -I'(x)-\dfrac{1}{2}J(x)\end{cases}.$$
3. En déduire que pour tout réel x :
$$\begin{cases} I'(x) & = \dfrac{-x}{2(1+x^2)}I(x)-\dfrac{1}{2(1+x^2)}J(x) \\ \quad\text{et} & \\ J'(x) & = \dfrac{1}{2(1+x^2)}I(x)-\dfrac{x}{2(1+x^2)}J(x)\end{cases}.$$
4. Calculer $I(x)$ et $J(x)$ pour tout réel x.

▶ **Corrigé.**–

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la fonction $r:\ t\mapsto e^{-t}\cdot\dfrac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

   En 0 : $r(t)\underset{t\to0^+}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{t}}=\varphi(t)$ et φ est intégrable sur $]0\,;1]$.

   De plus, $|t^2\cdot r(t)|=t^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-t}\cdot|\cos(xt)|\leqslant t^{\frac{3}{2}}\cdot e^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$,

   donc $r(t)=o_{+\infty}\big(\dfrac{1}{t^2}\big)$, donc r est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

   Finalement, la fonction r est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

   De façon analogue, la fonction $s:\ t\mapsto e^{-t}\cdot\dfrac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0\,;+\infty[$, intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

   Pour $x\neq0$: $s(t)\underset{t\to0^+}{\sim}x\cdot e^{-t}\cdot\sqrt{t}=\psi(t)$ avec ψ intégrable sur $]0\,;1]$, donc s est intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

   Les fonctions I et J sont donc bien définies sur $\mathbb{R}$.

2. Soient les fonctions :

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}} \end{array} \quad \text{et } h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times]0\,;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & e^{-t}\cdot\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}} \end{array}.$$

Les fonctions g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times]0\,;+\infty[$,
et : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -e^{-t}\cdot\sqrt{t}\cdot\sin(xt)$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cdot\sqrt{t}\cdot\cos(xt)$, avec pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}\cdot e^{-t}$, et de même $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \sqrt{t}\cdot e^{-t}$.
On sait que la fonction $t\mapsto\sqrt{t}\cdot e^{-t}$ est intégrable sur $]0\,;+\infty[$; donc, d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, les fonctions I et J sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad I'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\sqrt{t}\cdot\sin(xt)\mathrm{d}t \text{ et } J'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\sqrt{t}\cdot\cos(xt)\mathrm{d}t.$$

Ensuite, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x\cdot I'(x) &= \int_0^{+\infty}\sqrt{t}e^{-t}\big(-x\sin(xt)\big)\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\sqrt{t}e^{-t}\big(-x\sin(xt)\big)\mathrm{d}t \\
&= \lim_{A\to+\infty}\left(\Big[\sqrt{t}e^{-t}\cos(xt)\Big]_0^A - \int_0^A e^{-t}\big(-\sqrt{t}+\tfrac{1}{2\sqrt{t}}\big)\cos(xt)\mathrm{d}t\right) \quad \text{(I.P.P.)} \\
&= \lim_{A\to+\infty}\Bigg(\sqrt{A}e^{-A}\cos(Ax) + \int_0^A e^{-t}\sqrt{t}\cos(xt)\mathrm{d}t \\
&\qquad\qquad - \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\Bigg) \\
&= 0 + \int_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\cos(xt)\mathrm{d}t - \tfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\
&= J'(x) - \tfrac{1}{2}I(x)\cdot
\end{aligned}$$

On obtient de même : $\forall x\in\mathbb{R},\ x\cdot J'(x) = -I'(x) - \frac{1}{2}J(x)$, d'où :

$$x^2\cdot I'(x) = x\cdot J'(x) - \tfrac{1}{2}J(x) = -I'(x) - \tfrac{1}{2}J(x) - \tfrac{1}{2}xI(x),$$

et : $\quad 2(1+x^2)I'(x) = -J(x) - xI(x) \quad (1).$
De même :

$$x^2J'(x) = -xI'(x) - \tfrac{1}{2}xJ(x)) - J'(x) + \tfrac{1}{2}I(x) - \tfrac{1}{2}xJ(x),$$

d'où : $\quad 2(1+x^2)J'(x) = I(x) - xJ(x) \quad (2).$

3. Les relations (1) et (2) donnent bien le système :

$$\begin{cases} I'(x) & = \dfrac{-x}{2(1+x^2)} I(x) - \dfrac{1}{2(1+x^2)} J(x) \\ \quad \text{et} & \\ J'(x) & = \dfrac{1}{2(1+x^2)} I(x) - \dfrac{x}{2(1+x^2)} J(x) \end{cases}.$$

4. On pose $Z = I + \mathrm{i} \cdot J$, on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$Z'(x) = I'(x) + \mathrm{i} \cdot J'(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)} \cdot Z(x) + \frac{\mathrm{i}}{2(1+x^2)} \cdot Z(x)$$

$$\Leftrightarrow Z'(x) = \frac{-x+\mathrm{i}}{2(1+x^2)} \cdot Z(x) \cdot$$

D'où : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ Z(x) = Z(0) \cdot \exp\left(\displaystyle\int_0^x \frac{-t+\mathrm{i}}{2(1+t^2)} \mathrm{d}t \right).$

Or :

$$\begin{aligned} Z(0) = I(0) + \mathrm{i} \cdot J(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u \quad \text{avec le changement de variable } t = u^2 \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{d'après la valeur connue de } \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Z(x) &= \sqrt{\pi} \cdot \exp\left(\int_0^x \frac{-t+\mathrm{i}}{2(1+t^2)} \mathrm{d}t \right) \\ &= \sqrt{\pi} \cdot \exp\left(-\tfrac{1}{4} \ln(1+x^2) + \mathrm{i} \cdot \tfrac{1}{2} \arctan(x) \right) \\ &= \sqrt{\pi} \cdot (1+x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot \Big(\cos\left(\tfrac{1}{2}\arctan(x)\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\arctan(x)\right) \Big) \end{aligned}$$

On note $\theta = \frac{1}{2}\arctan(x)$, alors $2\cos^2(\theta) - 1 = \cos(2\theta) = \cos\big(\arctan(x)\big)$,
et on a : $\cos^2(2\theta) = \dfrac{1}{1+\tan^2(2\theta)} = \dfrac{1}{1+\tan\big(\arctan(x)\big)^2} = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Comme $2\theta = \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, alors $\cos(2\theta) > 0$,
d'où $\cos(2\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 2\cos^2(\theta) - 1$,
puis $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}\big(1+\cos(2\theta)\big) = \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\big) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}$.

On a aussi : $\theta = \frac{1}{2}\arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{4}\right[$, donc $\cos(\theta) > 0$ et :

$$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2}}.$$

On a enfin : $\sin^2(\theta) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\theta)\big) = \frac{1}{2}\big(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\big) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}$,
puis : $\sin(\theta) = \varepsilon \cdot \sqrt{\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}$ avec $\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, et donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I(x) + \mathrm{i}\cdot J(x) = Z(x) = \sqrt{\pi}\cdot\left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}} + \mathrm{i}\cdot\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}}\right),$$

soit :

$$I(x) = \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2(1+x^2)}} \text{ et } J(x) = \varepsilon\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{2\sqrt{1+x^2}}} \text{ avec } \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Exercice (5). Stabilité d'un système différentiel à coefficients constants

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et soit E l'espace des solutions réelles du système différentiel

$$(S): \quad X' = AX.$$

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme d'algèbre $||\cdot||: \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ X = (x_{i,j}) & \mapsto & n \max\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |x_{i,j}| \end{array}.$

Soit $A = B + N$ la décomposition de Dunford de la matrice A.

1. a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $||e^{t\cdot B}|| \leqslant C \cdot \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |e^{t\lambda}|$

   (où $\mathrm{Sp}(A)$ désigne le spectre de la matrice A).

   En déduire que si $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ pour toute valeur propre λ de A, alors $||e^{t\cdot A}|| \xrightarrow[t \to 0]{} 0$, puis que $X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ pour tout X de E.

   b) Montrer la réciproque de a) : si $X(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ pour tout élément X de E, alors $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

2. a) On suppose que X est bornée pour tout X de E ; soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$ et que s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que :

   $$\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I) \neq \dim \mathrm{Ker}\big((A - \lambda \cdot I)^k\big) \text{ et } \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I) \geqslant 2,$$

   alors $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

   Indication : montrer que dans ces conditions, il existe $X \in \mathrm{Ker}\big((A - \lambda \cdot I)^2\big) \setminus \mathrm{Ker}(A - \lambda \cdot I)$, et montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k X = \lambda^k \cdot X + k\lambda^{k-1} \cdot Y$, avec $Y = (A - \lambda \cdot I)X$.

   b) Montrer la réciproque de a).

▶ **Corrigé.–**

1. a) La matrice B est diagonalisable, donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice $D = P^{-1}BP$ soit diagonale, et alors :

$$e^{t\cdot B} = e^{P(t\cdot D)P^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \big(P(t \cdot D)P^{-1}\big)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot P(t\cdot D)^k P^{-1}$$

$$= P\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot D)^k\Big)P^{-1} = Pe^{t\cdot D}P^{-1},$$

d'où :

$$||e^{t\cdot B}|| = ||Pe^{t\cdot D}P^{-1}|| \leqslant ||P|| \cdot ||e^{t\cdot D}|| \cdot ||P||^{-1} \leqslant \underbrace{||P|| \cdot ||P^{-1}|| \cdot n}_{=C} \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}(B)} |e^{t\lambda}|.$$

Or $\mathrm{Sp}(B)=\mathrm{Sp}(A)$, donc : $\quad ||e^{t\cdot B}|| \leqslant C \cdot \max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} |e^{t\lambda}|$.

D'autre part : $\quad e^{t\cdot A}=e^{t\cdot B+t\cdot N}=e^{t\cdot B}e^{t\cdot N}$ car B et N commutent,

et $e^{t\cdot N}=\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{k!}\cdot(t\cdot N)^k$, où r est l'indice de nilpotence de N.

Alors pour $t\geqslant 0$: $\quad ||e^{t\cdot N}|| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\frac{||N||^k}{k!}t^k$.

Soit aussi λ_0 tel que $|e^{t\lambda_0}|=\max\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)}|e^{t\lambda}|$, alors :

$$
\begin{aligned}
||e^{t\cdot A}|| = ||e^{t\cdot B+t\cdot N}|| = ||e^{t\cdot B}e^{t\cdot N}|| \quad & \text{car } B \text{ et } N \text{ commutent, donc pour } t\geqslant 0,\\
\leqslant ||e^{t\cdot B}||\cdot||e^{t\cdot N}|| \leqslant C|e^{t\lambda_0}|\cdot\Big(\sum_{k=0}^{r-1}\frac{||N||^k}{k!}t^k\Big)&\\
\leqslant Ce^{t\mathrm{Re}(\lambda_0)}\cdot\Big(\sum_{k=0}^{r-1}\frac{||N||^k}{k!}t^k\Big) = C\cdot\sum_{k=0}^{r-1}\frac{||N||^k}{k!}t^k e^{t\mathrm{Re}(\lambda_0)},&
\end{aligned}
$$

qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ puisque $\mathrm{Re}(\lambda_0)<0$.
Einfi, si $X\in E$ alors : $\quad \forall t\in\mathbb{R},\ X(t)=e^{t\cdot A}X(0)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$.

b) Soit λ une valeur propre (complexe) de A et $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

On a : $\quad e^{t\cdot A}X_0=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot A^kX_0=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k\lambda^k}{k!}X_0=e^{t\lambda}X_0$.

Soit $X:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto e^{t\cdot A}X_0\end{array}$, alors : $\forall t\in\mathbb{R},\ X'(t)=Ae^{t\cdot A}X_0=AX(t)$;

en notant $X_1(t)=\mathrm{Re}\big(X_(t)\big)$ et $X_2(t)=\mathrm{Im}\big(X(t)\big)$, on a :

$$X_1'(t)+\mathrm{i}X_2'(t)=A\big(X_1(t)+\mathrm{i}X_2(t)\big) \text{ donc } \begin{cases} X_1'(t)=AX_1(t)\\ \text{et}\\ X_2'(t)=AX_2(t)\end{cases} \quad \text{car } A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

donc X_1 et X_2 appartiennent à E.
On a donc $\lim\limits_{t\to+\infty}X_1(t)=0=\lim\limits_{t\to+\infty}X_2(t)$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty}X(t)=0$,
donc : $e^{t\lambda}X_0=e^{t\cdot A}X_0=X(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, donc $\mathrm{Re}(\lambda)<0$.

2. a) Soit λ une valeur propre (complexe) de A et $X_0\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. On sait que $X:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\\ t\mapsto e^{t\cdot A}X_0\end{array}$ est une solution

du système (S) et que (voir 1.b)) $X_1 = \mathrm{Re}(X)$ et $X_2 = \mathrm{Im}(X)$ appartiennent à E, donc X_1 et X_2, puis $X = X_1 + \mathrm{i}X_2$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
Or : $X(t) = e^{t \cdot A} X_0 = e^{t\lambda} X_0$ (voir 1.b)) ; comme $X_0 \neq 0$ et puisque X est bornée sur $\mathbb{R}_+$, alors $\mathrm{Re}(\lambda) \leqslant 0$.

Considérons maintenant $F_k = \mathrm{Ker}\big((A - \lambda \cdot I)^k\big)$: il est clair que la suite $\big(\dim(F_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée de $\mathbb{N}$, donc elle est stationnaire.
Notons $r = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } F_k = F_{k+1}\big\}$, alors :
si $X \in F_{r+2}$, alors $(A - \lambda \cdot I)^{r+1}(A - \lambda \cdot I)X = (A - \lambda \cdot I)^{r+2}X = 0$,
donc $(A - \lambda \cdot I)X \in F_{r+1} = F_r$,
donc $(A - \lambda \cdot I)^r(A - \lambda \cdot I)X = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I)^{r+1}X = 0$,

donc $X \in F_{r+1}$.
Ainsi $F_{r+2} = F_{r+1}$, et de proche en proche, on aura :

$$F_r = F_{r+1} = F_{r+2} = \dots$$

Donc : si $F_1 = F_2$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_k = F_1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite.
Ainsi $F_1 \neq F_2$, donc il existe $X \in F_2 \setminus F_1$. Si on pose $Y = (A - \lambda \cdot I)X$, alors $AX = \lambda \cdot X + Y$, et :

$$(A - \lambda \cdot I)Y = (A - \lambda \cdot I)^2 X = 0 \Leftrightarrow AY = \lambda \cdot Y.$$

Une récurrence facile donne alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k X = \lambda^k \cdot X + k\lambda^{k-1} \cdot Y$, d'où :

$$\begin{aligned}
e^{t\cdot A}X &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot (t \cdot A)^k X = X + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot A^k X \\
&= X + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot (\lambda^k \cdot X + k\lambda^{k-1} \cdot Y) \\
&= X + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^k}{k!} \cdot X + t \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(t\lambda)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot Y \\
&= e^{t\lambda} X + t e^{t\lambda} \cdot Y.
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \mathrm{i}\beta$, et alors :

$$e^{t\cdot A}X = e^{\mathrm{i}t\beta} \cdot (t \cdot Y + X),$$

puis $||e^{t\cdot A}X|| = ||t \cdot Y + X|| \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ car $Y \neq 0$.
Par conséquent, la solution $t \mapsto e^{t\cdot A}X$ du système (S) est non bornée, ce qui est absurde. On en déduit que $\lambda < 0$.

b) On sait que $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r} E_{\lambda_i}$ où $F_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}\big((A-\lambda_i\cdot I)^{\beta_i}\big)$ est le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i.

Par conséquent :

$$\forall X\in\mathbb{C}^n,\ \exists!(X_1,\ldots,X_r)\in F_1\times\cdots\times F_r \text{ tel que } X=\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

- **Premier cas : si $\beta_i = 1$.** Dans ce cas :

$$e^{t\cdot A}X_i = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot A^k X_i = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot\lambda_i^k X_i = e^{t\lambda_i}\cdot X_i,$$

et comme $\mathrm{Re}(\lambda_i)\leqslant 0$, alors la fonction $t\mapsto e^{t\cdot A}X_i = e^{t\lambda_i}X_i$ (de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$), est bornée.

- **Deuxième cas : si $\beta_i \geqslant 2$.**

Dans ce cas, $e^{t\cdot A}X_i = e^{t\lambda_i\cdot I + t(A-\lambda_i\cdot I)}X_i = e^{t\lambda_i}e^{t\cdot(A-\lambda_i\cdot I)}X_i$.

Or $X_i\in\mathrm{Ker}\big((A-\lambda_i\cdot I)^{\beta_i}\big)$, d'où :

$$e^{t\cdot(A-\lambda_i\cdot I)}X_i = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\cdot(A-\lambda_i\cdot I)^k X_i = \sum_{k=0}^{\beta_i-1}(A-\lambda_i\cdot I)^k X_i,$$

puis :

$$||e^{t\cdot A}X_i|| = e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}||e^{t\cdot(A-\lambda_i\cdot I)}X_i|| \leqslant e^{t\mathrm{Re}(\lambda_i)}\sum_{k=0}^{\beta_i-1}||(A-\lambda_i\cdot I)^k X_i||,$$

qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ puisque $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$.

Comme $e^{t\cdot A}X = e^{t\cdot A}\Big(\sum_{i=1}^{r} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{r} e^{t\cdot A}X_i$, alors $t\mapsto e^{t\cdot A}X$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, et toutes les solutions de (S) sont donc bornées.

Exercice (6). Théorème de Floquet

Soit le système différentiel $(\mathcal{H})$: $\quad X'(t) = A(t)X(t)$, où $A: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t \mapsto A(t) \end{array}$

est continue et périodique, de période $T > 0$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et une solution Y non nulle de $(\mathcal{H})$, telle que $Y(t+T) = \lambda \cdot Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ une base de solutions de $(\mathcal{H})$, et la matrice $M = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \end{pmatrix}$.
   Montrer que la matrice $\big(M(t)\big)^{-1} \times M(t+T)$ est indépendante de t, et en déduire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(t+T) = M(t)e^{t \cdot B}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis que l'application $Q: \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ t \mapsto M(t)e^{-t \cdot B} \end{array}$ est T-périodique.

   Indication : on admet que l'application $\exp: \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\ X \mapsto e^X \end{array}$,

   est surjective.

   On obtient ainsi l'égalité : $\quad M(t) = Q(t)e^{t \cdot B}$ avec Q périodique, de période T. On appelle cette identité la **forme normale de Floquet**.
3. Soient $B = D + N$ la décomposition de Dunford de B, et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Delta = P^{-1}DP$ est diagonale.
   Soient aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Z_1(t),\ Z_2(t), \ldots, Z_n(t)$ les colonnes de la matrice $M(t)P$.

   a) Montrer que $(Z_1, \ldots, Z_n)$ est une base de solutions de $(\mathcal{H})$.

   b) Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de B, et $R_{i,k}(t)$ est la k-ième colonne de la matrice $\frac{1}{i!} \cdot Q(t)N^iP$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$.
   Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

   $$Z_k(t) = e^{\lambda_k t} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} R_{i,k}$$

   et vérifier que les $R_{i,k}$ sont T-périodiques.
4. Application. Résoudre le système différentiel :

   $$(S) : \begin{cases} x'(t) &= x(t) - \cos(t) \cdot y(t) \\ y'(t) &= \cos(t) \cdot x(t) + y(t) \end{cases},$$

   et déterminer la forme normale de Floquet pour (S).

▶ **Corrigé.**–

1. Soit $\begin{array}{rl} Y_T: & \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & t \mapsto Y(t+T) \end{array}$; pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} Y_T'(t) = Y'(t+T) &= A(t+T)Y(t+T) \\ &= A(t)Y_T(t) \quad \text{puisque } A \text{ est } T\text{-périodique.} \end{aligned}$$

Ainsi, $Y_T \in S_{\mathcal{H}}$, où $S_{\mathcal{H}}$ est l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$.

Ensuite, l'application $\begin{array}{rl} L: & S_{\mathcal{H}} \to S_{\mathcal{H}} \\ & Y \mapsto Y_T \end{array}$ est un endomorphisme de $S_{\mathcal{H}}$. En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et tous $Y,\ Z \in S_{\mathcal{H}}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} L(\alpha \cdot Y + Z)(t) = (\alpha \cdot Y + Z)_T(t) &= \alpha \cdot Y(t+T) + Z(t+T) \\ &= \alpha \cdot Y_T(t) + Z_T(t) = \big(\alpha \cdot L(Y) + L(Z)\big)(t). \end{aligned}$$

Ainsi : $L(\alpha \cdot Y + Z) = \alpha \cdot L(Y) + L(Z)$, et L est bien un endomorphisme de $S_{\mathcal{H}}$.

Soit alors λ une valeur propre (éventuellement complexe) de L et Y un vecteur propre associé, on a alors :

$$L(Y) = \lambda \cdot Y \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ Y_T(t) = \lambda \cdot Y(t) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t+T) = \lambda \cdot Y(t).$$

2. En posant $F(t) = \big(M(t)\big)^{-1}$, on sait que : $F'(t) = -\big(M(t)\big)^{-1}M'(t)M(t)$.
D'où, en posant $G(t) = \big(M(t)\big)^{-1} \times M(t+T)$:

$$\begin{aligned} G'(t) &= -\big(M(t)\big)^{-1}M'(t)\big(M(t)\big)^{-1}M(t+T) + \big(M(t)\big)^{-1}M'(t+T) \\ &= -\big(M(t)\big)^{-1}A(t)\underbrace{M(t)\big(M(t)\big)^{-1}}_{=I_n}M(t+T) + \big(M(t)\big)^{-1}A(t)M(t+T) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, G est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$: on note $C = \big(M(t)\big)^{-1}M(t+T)$.
D'après l'indication fournie, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $C = e^{T \cdot B}$, soit : $\big(M(t)\big)^{-1}M(t+T) = e^{T \cdot B}$, et ce pour tout $t \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Q(t+T) = M(t+T)e^{-(t+T)B} = M(t+T)e^{-T \cdot B}e^{-t \cdot B} = M(t)e^{-t \cdot B} = Q(t),$$

donc Q est T-périodique.

3. a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\big(Z_1(t) \quad Z_2(t) \quad \cdots \quad Z_n(t)\big) = M(t)P$, donc :

$$\begin{aligned} \big(Z_1'(t) \quad Z_2'(t) \quad \cdots \quad Z_n'(t)\big) &= M'(t)P = A(t)M(t)P = A(t)Z(t) \\ &= A(t)\,\big(Z_1(t) \quad Z_2(t) \quad \cdots \quad Z_n(t)\big) \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $Z_k'(t) = A(t)Z_k(t)$, et Z_k est donc solution de $(\mathcal{H})$. Comme de plus $M(t)P = \big(Z_1(t) \quad Z_2(t) \quad \cdots \quad Z_n(t)\big)$

est inversible (comme produit de deux matrices qui le sont), c'est une matrice fondamentale pour $(\mathcal{H})$ et $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est une base de solutions de $(\mathcal{H})$.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M(t) &= Q(t)e^{t\cdot B} = Q(t)e^{t\cdot(D+N)} \\ &= Q(t)e^{t\cdot N}e^{t\cdot P\Delta P^{-1}} = Q(t)e^{t\cdot N}Pe^{t\cdot\Delta}P^{-1}, \end{aligned}$$

donc $M(t)P = Q(t)e^{t\cdot N}Pe^{t\cdot\Delta}$. Or :

$$\begin{aligned} e^{t\cdot\Delta} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\cdot\Delta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda_1)^k}{k!} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\lambda_n)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et $e^{t\cdot N}P = \Big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{t^i \cdot N^i}{i!}\Big)P = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{t^i \cdot N^iP}{i!}$, donc :

$$\begin{aligned} \big(Z_1(t) \quad Z_2(t) \quad \cdots \quad Z_n(t)\big) &= M(t)P = Q(t)\sum_{i=0}^{n-1} \frac{t^iN^iP}{i!}e^{t\cdot\Delta} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t^i \cdot \frac{Q(t)N^iP}{i!}e^{t\cdot\Delta} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t^i \cdot \big(R_{i,1}(t) \quad \cdots \quad R_{i,n}(t)\big) \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t^i \cdot \big(R_{i,1}(t)e^{t\lambda_1} \quad \cdots \quad R_{i,n}(t)e^{t\lambda_n}\big), \end{aligned}$$

Donc pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$: $\quad Z_k(t) = \Big(\sum\limits_{i=0}^{n-1} t^i \cdot R_{i,k}(t)\Big)e^{t\lambda_k}$.

4. On pose $z = x + \mathrm{i}y$, alors pour tout réel t :

$$z't) = \mathrm{i}\big(1 + \mathrm{i}\cos(t)\big)x(t) + \mathrm{i}\big(1 + \mathrm{i}\cos(t)\big)y(t) = \big(1 + \mathrm{i}\cos(t)\big)z(t),$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
z(t) &= \lambda \cdot e^{\int_0^t \left(1+\mathrm{i}\cos(u)\right)\mathrm{d}y} = \lambda \cdot e^{t+\mathrm{i}\sin(t)} \\
&= e^t(\alpha+\mathrm{i}\beta)\cdot\Big(\cos\big(\sin(t)\big)+\mathrm{i}\sin\big(\sin(t)\big)\Big) \qquad \text{(on a posé } \lambda=\alpha+\mathrm{i}\beta) \\
&= e^t\Big(\alpha\cos\big(\sin(t)\big)-\beta\sin\big(\sin(t)\big)+\mathrm{i}\Big(\beta\cos\big(\sin(\beta t)\big)+\alpha\sin\big(\sin(t)\big)\Big),
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t \cdot \begin{pmatrix} \alpha\cos\big(\sin(t)\big)-\beta\sin\big(\sin(t)\big) \\ \alpha\sin\big(\sin(t)\big)+\beta\cos\big(\sin(t)\big) \end{pmatrix} = e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos\big(\sin(t)\big) & -\sin\big(\sin(t)\big) \\ \sin\big(\sin(t)\big) & \cos\big(\sin(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}
$$

et $M(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} \cos\big(\sin(t)\big) & -\sin\big(\sin(t)\big) \\ \sin\big(\sin(t)\big) & \cos\big(\sin(t)\big) \end{pmatrix}$ est une matrice fondamentale du système (S) ; sa forme normale de Floquet est obtenue avec :

$$
B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} \cos\big(\sin(t)\big) & -\sin\big(\sin(t)\big) \\ \sin\big(\sin(t)\big) & \cos\big(\sin(t)\big) \end{pmatrix}.
$$

Imprimé en Belgique et achevé sur les presses de SNEL Grafics, Liège
Dépôt légal mars 2022