Exercices sur les équations différentielles

Exercice (1).

1. Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}_1): \ \sin(t)\cdot y'(t) - 2\cos(t)\cdot y(t) = 0.$$

   Que peut-on dire de la dimension de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$?

2. Soit l'équation différentielle

$$(\mathcal{H}_2): \ x^2\cdot y''(x) - 4x\cdot y'(x) + (x^2+6)\cdot y(x) = 0.$$

   a) Déterminer les solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en séries entières.

   b) Quelle est la dimension de l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$?

▶ **Corrigé.–**

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$ quelconque, sur l'intervalle $I_k =]k\pi\,;(k+1)\pi[$:
   l'équation différentielle $y'(t) = 2\cdot\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}\cdot y(t)$ a pour solution la fonction $y_k: \ t \mapsto \lambda_k \cdot e^{\int 2\frac{\cos(t)}{\sin(t)}\mathrm{d}t} = \lambda_k\cdot e^{2\ln(|\sin(t)|)} = \lambda_k\cdot\sin^2(t)$ (où $\lambda_k \in \mathbb{R}$).
   On vérifie alors facilement que pour tout $k\in\mathbb{Z}$, la fonction

$$x_k: \ \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \sin^2(t) & \text{si } t \in]k\pi\,;(k+1)\pi[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array},$$

   est une solution de $(\mathcal{H}_1)$.
   En effet, x_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\,;(k+1)\pi\}$, et on a

clairement $x_k(k\pi) = x_k'(k\pi) = 0$.
Il reste à vérifier assez facilement que la famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre : par conséquent, $\dim\big(S_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})\big) = +\infty$, où $S_{\mathcal{H}_1}(\mathbb{R})$ est l'espace des solutions de $\mathcal{H}_1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On résout ici l'équation différentielle :
$$(\mathcal{H}_2) :\ x^2 \cdot y''(x) - 4x \cdot y'(x) + (x^2+6) \cdot y(x) = 0.$$
   a) Supposons que $(\mathcal{H}_2$ possède une solution développable en série entière : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ (de rayon de convergence $R > 0$), alors pour tout x tel que $|x| < R$:
$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$
   Ainsi, pour tout x tel que $|x| < R$:
$$\begin{aligned} & 0 = x^2 \cdot y''(x) - 4x \cdot y'(x) + (x^2+6) \cdot y(x) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + (x^2+6) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ \Leftrightarrow\ & 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \big(n(n-1) - 4n\big) a_n x^n + 6 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 6a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 5n + 6) a_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^n \\ \Leftrightarrow\ & 0 = 6a_0 + 2a_1 \cdot x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big((n^2 - 5n + 6) a_n + a_{n-2}\big) x^n. \end{aligned}$$
   On en déduit :
$$a_0 = a_1 = 0 \text{ et pour tout entier } n \geqslant 2,\ (n^2 - 5n + 6) a_n + a_{n-2} = 0.$$
   Or $(n^2 - 5n + 6) = (n-2)(n-3)$, donc pour $n = 2$ et $n = 3$ on a : $0 \cdot a_n + 0 = 0$, qui est toujours vrai, tandis que pour tout entier $n \geqslant 4$: $a_n = \dfrac{-a_{n-2}}{(n-2)(n-3)}$, qui s'écrit aussi :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n+2} = \frac{-a_{2n}}{2n(2n-1)} \text{ et } a_{2n+3} = \frac{-a_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}.$$
   Une récurrence facile donne alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} \cdot a_2 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \cdot a_3,$$

d'où la forme générale des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en série entière :

$$\begin{aligned} y(x) &= a_2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n-2)!} + a_3 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)!} \\ &= a_2 \cdot x^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} + a_3 \cdot x^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= a_2 \cdot x^2 \cdot \cos(x) + a_3 \cdot x^2 \cdot \sin(x). \end{aligned}$$

Remarquons que le rayon de convergence de ces solutions est infini. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ développables en série entière, est donc $\mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, où $y_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \cdot \cos(x) \end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \cdot \sin(x) \end{array}$.

b) L'espace des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $I_1 =]-\infty\,;0[$ ou $I_2 =]0\,;+\infty[$ est de dimension 2 et comme y_1 et y_2 sont solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$, ces fonctions sont aussi solutions de l'équation différentielle sur I_1 et sur I_2. On en déduit :

$$S_{\mathcal{H}_2}\big(]-\infty\,;0[\big) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2) \text{ et } S_{\mathcal{H}_2}\big(]0\,;+\infty[\big) = \mathrm{Vect}(y_1, y_2).$$

Par conséquent, si y est solution de $\mathcal{H}_2$ sur $\mathbb{R}$, alors y est solution de $(\mathcal{H}_2)$ sur I_1 et sur I_2, donc il existe des réels $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall x \in]0\,;+\infty[: &\quad y(x) = \lambda_1 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_1 \cdot x^2 \sin(x), \\ \text{et } \forall x \in]0\,;+\infty[: &\quad y(x) = \lambda_2 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_2 \cdot x^2 \sin(x). \end{aligned}$$

Or sur $]-\infty\,;0[$:

$$y'(x) = \lambda_1 \cdot 2x\cos(x) - \lambda_1 \cdot x^2 \sin(x) + \mu_1 \cdot 2x \sin(x) + \mu_1 \cdot x^2 \cos(x)$$

$$\begin{aligned} \text{et } y''(x) = {} & \lambda_1 \cdot 2\cos(x) - \lambda_1 \cdot 4x \sin(x) - \lambda_1 \cdot x^2 \cos(x) + \mu_1 \cdot 2\sin(x) \\ & + \mu_1 \cdot 4x\cos(x) - \mu_1 \cdot x^2 \sin(x). \end{aligned}$$

D'où : $\quad y(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0,\ y'(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0$ et $y''(x) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 2\lambda_1$.

De même : $\quad y(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0,\ y'(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$ et $y''(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 2\lambda_2$.

On peut donc recoller les solutions au point 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2$.

On conclut donc que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H}_2)$ sur $\mathbb{R}$ est :

$$S_{\mathcal{H}_2}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(z_1, z_2, z_3),$$

où :

$$z_1 \colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2\cos(x) \end{array}, \quad z_2 \colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(x) & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \quad \text{et } z_3 \colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x>0 \\ x^2\sin(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Exercice (2).

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, et soit l'équation

$$(E) : \; y''(x) - 4y(x) = a|x| + b.$$

Montrer que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ qui admet des asymptotes en $+\infty$ et en $-\infty$, et déterminer cette solution.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$ monotone, admettant une limite finie en $+\infty$.

Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle

$$(E) : \; y'' + y = f,$$

sont bornées.

Exercice (3).
Soit $p, q: [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues, et l'équation :

$$(S.L.): \; y'' + py' + qy = 0.$$

1. Soit y une solution non nulle de $(S.L.)$.
   a) Montrer que les fonctions y et y' ne s'annulent pas simultanément.
   b) Montrer que les zéros de y sont en nombre fini.
2. Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $(S.L.)$. On suppose que y_1 admet au moins deux zéros : soient α et β deux zéros consécutifs de y_1.
   a) Montrer que y_2 admet au moins un zéro dans l'intervalle ouvert $]\alpha\,;\beta[$.
   b) La fonction y_2 peut-elle avoir plusieurs zéros dans $]\alpha\,;\beta[$?

▶ **Corrigé.–**

1. a) S'il existe $t_0 \in [a\,;b]$ tel que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, vu que la fonction nulle est solution de l'équation $(S.L.)$, alors d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, la solution y est nulle : par l'absurde, il n'existe donc aucun $t \in [a\,;b]$ tel que $y(t) = y'(t) = 0$.

   b) Supposons que la solution y possède une infinité de zéros deux à deux distincts dans $[a\,;b]$: on extrait de cette famille infinie une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de zéros de y.
   D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut alors en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $[a\,;b]$.
   On note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$: comme la fonction y est continue, alors $y(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{y(x_{\varphi(n)})}_{=0} = 0$.
   Le théorème de Rolle s'applique par ailleurs, qui assure que pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe un réel c_n compris entre $x_{\varphi(n)}$ et $x_{\varphi(n+1)}$ tel que $y'(c_n) = 0$.
   Or $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (par encadrement), et comme y' est aussi continue, alors $y'(\ell) = \lim\limits_{n\to+\infty} y'(c_n) = 0$.
   On a donc trouvé un réel ℓ de $[a\,;b]$ tel que $y(\ell) = y'(\ell) = 0$, ce qui contredit le résultat de a) : on en conclut que la solution non nulle y possède un nombre fini de zéros dans $[a\,;b]$.

   c) a) Les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes, donc le wronskien $w(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2' - y_1' \cdot y_2$ ne s'annule pas sur $[a\,;b]$.
   D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $w(y_1, y_2)$ reste de

signe constant sur $[a\,;b]$, et quitte à échanger les rôles de y_1 et y_2, on peut supposer que $w(y_1,y_2)>0$. On en déduit :

$$w(y_1,y_2)(\alpha)=\underbrace{y_1(\alpha)}_{=0}\cdot y_2'(\alpha)-y_1'(\alpha)\cdot y_2(\alpha)=-y_1'(\alpha)\cdot y_2(\alpha)>0,$$

et

$$w(y_1,y_2)(\beta)=y_1(\beta)\cdot y_2'(\beta)-y_1'(\beta)\cdot y_2(\beta)=-y_1'(\beta)\cdot y_2(\beta)>0.$$

Or α et β sont deux zéros consécutifs de y_1, donc $y_1'(\alpha)$ et $y_1'(\beta)$ sont de signes opposés. On en déduit que $y_2(\alpha)$ et $y_2(\beta)$ sont de signes opposés ; lke théorème des valeurs intermédiaires assure alors l'exisence d'un réel $\gamma\in]\alpha\,;\beta[$ tel que $y_2(\gamma)=0$.

b) S'il existe deux réels distincts γ, δ dans $]\alpha\,;\beta[$ tels que $y_2(\gamma)=y_2(\delta)=0$, alors par le même raisonnement qu'en 2.a), il existe un réel $c\in]\gamma\,;\delta[\subset]\alpha\,;\beta[$ tel que $y_1(c)=0$, ce qui est incompatible avec le fait que α et β sont deux zéros consécutifs de y_1.
La fonction y_2 s'annule donc une et une seule fois dans $]\alpha\,;\beta[$.

Exercice (4).
Soit l'équation

$$(S.L.):\quad y''(x)+q(x)\cdot y(x)=0,$$

où $q:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, négative et non nulle sur $\mathbb{R}$.

1. a) Montrer que si y est une solution réelle de $(S.L.)$, alors la fonction y^2 est convexe.
   b) Montrer que si y est une solution réelle positive de $(S.L.)$ sur un intervalle I, alors y est convexe sur I.
   c) Montrer que la fonction nulle est l'unique solution réelle bornée de $(S.L.)$.
2. Soit φ la solution réelle de $(S.L.)$ telle que $\varphi(0)=1$ et $\varphi'(0)=0$.
   a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ |\varphi(x)|\geqslant 1$, puis que $\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi(x)\geqslant 1$ et que φ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   b) On suppose qu'il existe $\alpha>0$ tel que $q(x)\leqslant-\alpha^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   Montrer que $\varphi(x)\geqslant \mathrm{ch}(\alpha x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   Indication : écrire $\varphi''-\alpha^2\varphi=f$ avec $f(x)=-\big(q(x)+\alpha^2\big)\varphi(x)$, et utiliser la méthode de variation des constantes.

Exercice (5).

Soit l'équation différentielle :

$$(\mathcal{H}) : \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = 0.$$

On suppose que le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ est scindé et que $P = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$.

On définit l'endomorphisme $D : \begin{array}{l} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ \qquad f \mapsto f' \end{array}$

et l'application $I : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t \end{array}$.

On note aussi $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} \operatorname{Ker}\big((D - \lambda_i.I)^{\alpha_i}\big)$.
2. En déduire que : $\quad \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \left\{ y : \ t \mapsto \sum_{i=1}^{r} P_i(t).e^{\lambda_i \cdot t} \,\middle|\, P_i \in \mathbb{R}_{\alpha_i - 1}[X] \right\}$.
3. **Application :** résoudre les équations différentielles suivantes :
   a) $(E_1) : \quad y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t - 3.$
   b) $(E_2) : \quad y^{(4)}(t) - 2y''(t) + y(t) = 0.$

► **Corrigé.**–

1. Si f est solution de $(\mathcal{H})$, alors f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f^{(n)} = -a_{n-1} \cdot f^{(n-1)} - \cdot - a_1 \cdot f' - a_0 \cdot f$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est $(n+1)$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$; de proche en proche, on obtient que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   On en déduit :
$$\big(f \in S_{\mathcal{H}}\big) \Leftrightarrow \big(P(D)(f) = 0\big) \Leftrightarrow f \in \operatorname{Ker}\big(P(D)\big) \Leftrightarrow f \in \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} \Big(\operatorname{Ker}\big((D - \lambda_i.I)^{\alpha_i}\big)\Big),$$
   d'après le théorème des noyaux.
2. Pour tout i de $\{1, 2, \ldots, r\}$, on note $F_{\lambda_i} = \operatorname{Vect}\big(g_{0,\lambda_i}, g_{1,\lambda_i}, \ldots, g_{\alpha_i - 1,\lambda_i}\big)$ où les fonctions g_k sont définies pour tout $k \in \mathbb{N}$ par $g_{k,\lambda_i} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \quad \mathbb{R} \\ t \mapsto t^k \cdot e^{\lambda_i \cdot t} \end{array}$.

   Il est facile de voir que $\dim(F_{\lambda_i}) = \alpha_i$ et que :
$$F_{\lambda_i} = \left\{ t \mapsto P_0(t) \cdot e^{\lambda_i \cdot t} \ ; \ P_0 \in \mathbb{R}_{\alpha_i - 1}[X] \right\}.$$
   D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(D - \lambda_i \cdot I)(g_{k,\lambda_i}) = k \cdot g_{k-1,\lambda_i}$.

En effet, pour tout réel t :

$(D-\lambda_i\cdot I)(g_{k,\lambda_i})(t)=kt^{k-1}\cdot e^{\lambda_i\cdot t}+\lambda_i\cdot t^k\cdot e^{\lambda_i\cdot t}-\lambda_i\cdot t^k\cdot e^{\lambda_i\cdot t}=k\cdot g_{k-1,\lambda_i}(t)$.

Répétant cette opération α_i fois, on obtient pour tout $k\in\{0,1,\ldots,\alpha_i-1\}$, on obtient : $(D-\lambda_i\cdot I)^{\alpha_i}(g_{k,\lambda_i})=0$, et donc pour tout $i\in\{1,2,\ldots,r\}$:

$$F_{\lambda_i}\subset \operatorname{Ker}\big((D-\lambda_i\cdot I)^{\alpha_i}\big),\ \text{puis}\ \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}F_{\lambda_i}\subset S_{\mathcal{H}}.$$

Or $\dim\big(\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}F_{\lambda_i}\big)=\sum_{i=1}^{r}\alpha_i=n=\dim(S_{\mathcal{H}})$, d'où : $\quad S_{\mathcal{H}}=\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant r}F_{\lambda_i}$,

soit : $\quad S_{\mathcal{H}}=\left\{y:\ \begin{array}{rl}\mathbb{R}\to & \mathbb{R}\\ t\mapsto & \sum_{i=1}^{r}P_i(t)\cdot e^{\lambda_i\cdot t}\end{array}\ ;\ P_i\in\mathbb{R}_{\alpha_i-1}[X]\right\}$.

3. Application.

a) L'équation (E_1) : $\quad y'''(t)-3y''(t)+3y'(t)-y(t)=t-3$
a pour équation homogène associée :

$$y'''(t)-3y''(t)+3y'(t)-y(t)=0\Leftrightarrow (D-I)^3(y)(t)=0.$$

Ainsi, d'après 2 :

$$S_{\mathcal{H}}=\operatorname{Ker}\big((D-I)^3\big)=\big\{(at^2+bt+c)\cdot e^t\ ;\ a,b\in\mathbb{R}\big\}.$$

De plus, la fonction $y_p:\ \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto -t\end{array}$ est une solution particulière de (E_1), donc :

$$S_{(E_1)}=\big\{t\mapsto -t+(at^2+bt+c)\cdot e^t\ ;\ a,b\in\mathbb{R}\big\},$$

où $S_{(E_1)}$ est l'espace affine des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

b) L'équation différentielle (E_2) est déjà homogène, et a pour ensemble solution :

$$\begin{aligned}S_{\mathcal{H}}&=\operatorname{Ker}\big(P(D)\big)\quad \text{où } P=X^4-2X^2+1=(X-1)^2(X+1)^2\\ &=\operatorname{Ker}\big((D-I)^2(D+I)^2\big)=\operatorname{Ker}\big((D-I)^2\big)\oplus\operatorname{Ker}\big((D+I)^2\big).\end{aligned}$$

Ainsi, d'après 2 :

$$S_{(E_2)}=\left\{y:\ \begin{array}{rl}\mathbb{R}\to & \mathbb{R}\\ t\mapsto & (at+b)\cdot e^t+(ct+d)\cdot e^{-t}\end{array}\ ;\ a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}.$$

Exercice (6).

1. Soit $(a,\ell)\in\mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Re}(a)>0$ et soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{C})$ vérifiant :
$$\big(f'(t)+a\cdot f(t)\big)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell.$$
Montrer que $f(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell$.
2. Soit $g\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{C})$ vérifiant : $\big(g''(t)+g'(t)+g(t)\big)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell$.
Montrer que $g(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}\ell$.
3. Généraliser.

▶ **Corrigé.–**

1. Posons pour tout réel $t\in\mathbb{R}_+$, $g(t)=f(t)-\ell$ et $\varepsilon(t)=g'(t)+a\cdot g(t)$, alors $\varepsilon(t)=f'(t)+a\cdot f(t)-\ell\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ et g est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+a\cdot y=\ell$.
L'équation homogène associée à (E) est (H) : $y_H'+a\cdot y_H=0$; il existe donc $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $y_H(t)=\lambda\cdot e^{-at}$.
On utilise ensuite la méthode de variation de la constante,
en posant $g(t)=\lambda(t)\cdot e^{-at}$. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$:
$$g'(t)=\lambda'(t)\cdot e^{-at}-\lambda(t)\cdot a\cdot e^{-at}\Leftrightarrow g'(t)+a\cdot g(t)=\lambda'(t)\cdot e^{-at}.$$
Or $g'(t)+a\cdot g(t)=\varepsilon(t)$, donc $\lambda'(t)=e^{at}\cdot\varepsilon(t)$.
On choisit alors : $\lambda(t)=\displaystyle\int_0^t\varepsilon(u)\cdot e^{au}\mathrm{d}u$; on a alors :
$$g(t)=y_H(t)+\lambda(t)\cdot e^{-at}=\lambda\cdot e^{-at}+\left(\int_0^t\varepsilon(u)\cdot e^{au}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-at}.$$
De plus : $\left|\lambda\cdot e^{-at}\right|=|\lambda|\cdot e^{-\mathrm{Re}(a)\cdot t}\xrightarrow[t\to 0]{}0$ car $\mathrm{Re}(a)>0$.
Comme $\varepsilon(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, alors :
$$\forall\alpha>0,\ \exists A>0 \text{ tel que si } u>A \text{ alors } |\varepsilon(u)|<\alpha.$$
Pour tout $t>A$, on écrit alors :
$$\left(\int_0^t\varepsilon(u)\cdot e^{au}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-at}=\left(\int_0^A\varepsilon(u)\cdot e^{au}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-at}+\left(\int_A^t\varepsilon(u)\cdot e^{au}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-at},$$
où :
$$\left|\left(\int_0^A\varepsilon(u)\cdot e^{au}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-at}\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\int_0^A|\varepsilon(u)|\cdot e^{\mathrm{Re}(a)\cdot u}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-\mathrm{Re}(a)\cdot t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0,$$

puisque $\mathrm{Re}(a) > 0$. De plus, pour tout $t > A$:

$$\left|\left(\int_A^t \varepsilon(u)\cdot e^{au}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-at}\right| = \left(\int_A^t |\varepsilon(u)|\cdot e^{\mathrm{Re}(a)\cdot u}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-\mathrm{Re}(a)\cdot t}$$
$$= \left(\int_A^t \alpha\cdot e^{\mathrm{Re}(a)\cdot u}\mathrm{d}u\right)\cdot e^{-\mathrm{Re}(a)\cdot t} = \frac{\alpha}{\mathrm{Re}(a)}\cdot\left[e^{\mathrm{Re}(a)\cdot u}\right]_A^t\cdot e^{-\mathrm{Re}(a)\cdot t}$$
$$\leqslant \frac{\alpha}{\mathrm{Re}(a)}\cdot e^{\mathrm{Re}(a)\cdot t}\cdot e^{-\mathrm{Re}(a)\cdot t} = \frac{\alpha}{\mathrm{Re}(a)}.$$

En rassemblant ces résultats, on en déduit que $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, puis $f(t) = g(t) + \ell \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.

2. On suppose que $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{C})$ vérifie $g''(t) + g'(t) + g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.
   Cherchons $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ et une fonction h tels que
   $$h(t) = g'(t) + \alpha\cdot g(t) \text{ et } g''(t) + g'(t) + g(t) = h'(t) + \beta\cdot h(t).$$
   On a alors :
   $$h'(t)+\beta\cdot h(t)=g''(t)+\alpha\cdot g'(t)+\beta\cdot\big(g'(t)+\alpha\cdot g(t)\big)=g''(t)+(\alpha+\beta)\cdot g'(t)+\alpha\beta,$$
   et par identification, il suffit de choisir $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ tels que : $\begin{cases}\alpha+\beta &= 1\\ \alpha\cdot\beta &= 1\end{cases}$.
   Les réels α et β sont donc solutions de l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.
   Son discriminant est $\Delta = 1 - 4 = -3$, et on peut choisir par exemple :
   $$\alpha = \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad\text{et}\quad \beta = \tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$
   On a alors : $\quad h'(t) + \beta\cdot h(t) = g''(t) + g'(t) + g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.
   Comme $\mathrm{Re}(\beta) = \frac{1}{2} > 0$, alors d'après 1 : $h(t) = g'(t) + \alpha\cdot g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$,
   et comme $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, alors d'après 1, $g(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.

3. Généralisation : Soit $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme dont les racines complexes ont toutes des parties réelles strictement négatives.
   On considère l'endomorphisme de dérivation $D\colon \begin{array}{ccc}\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{C}) & \to & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{C})\\ f & \mapsto & f'\end{array}$;
   on suppose : $P(D)(f)(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{C}$, montrons qu'alors $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.

   On rédige une preuve par récurrence.
   Initialisation.– Soit $P(X) = X - a$ avec $\mathrm{Re}(a) < 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+\,;\mathbb{C})$ tels que $P(D)(f)(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, soit $f'(t) - a\cdot f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.
   Comme $\mathrm{Re}(-a) > 0$, alors d'après 1 : $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.

Hypothèse de récurrence.– Si $Q = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est un polynôme dont les racines ont toutes une partie réelle strictement négative, et f est une fonction telle que $Q(D)(f)(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, alors $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.

Hérédité.– Soit $P(X) = X^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \prod_{i=1}^{n+1} (X - \lambda_k)$ avec $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$.
On écrit alors $P(X) = (X - \lambda_{n+1})Q(X)$ où $Q(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$, et on suppose que $P(D)(f)(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell \Leftrightarrow Q(D)(D - \lambda_{n+1} \cdot I)(f)(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, alors par hypothèse de récurrence : $(D - \lambda_{n+1} \cdot I)(f)(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$, et comme $\mathrm{Re}(-\lambda_{n+1}) > 0$, alors d'après 1, $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \ell$.

Exercice (7). Équation de Hill

Soit l'équation différentielle :

$$(\mathcal{H}): \quad y'' + q \cdot y = 0,$$

où $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, périodique de période $T > 0$.

1. Justifier l'existence de deux solutions y_1 et y_2 de $(\mathcal{H})$ telles que : $\begin{cases} y_1(0) & = 1 \\ y_1'(0) & = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y_2(0) & = 0 \\ y_2'(0) & = 1 \end{cases}$, que l'espace des solutions de $(\mathcal{H})$ est $S_{\mathcal{H}} = \mathrm{Vect}(y_1, y_2)$, et montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad w(t) = y_1(t) \cdot y_2'(t) - y_1'(t) \cdot y_2(t) = 1.$$

2. Montrer que si y est une solution de $(\mathcal{H})$, alors la fonction $t \mapsto y(t+T)$ est aussi solution, et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y_1(t+T) & = y_1(T) \cdot y_1(t) + y_1'(T) \cdot y_2(t) \\ \text{et} & \\ y_2(t+T) & = y_2(T) \cdot y_1(t) + y_2'(T) \cdot y_2(t) \end{cases}.$$

3. Soit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mu = e^{\lambda T}$.
Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes :

   (i) L'équation $(\mathcal{H})$ possède une solution y non nulle qui vérifie :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t+T) = \mu \cdot y'(t).$$

   (ii) Le réel μ est solution de l'équation d'inconnue x :

   $$x^2 - \big(y_1(T) + y_2'(T)\big) \cdot x + 1 = 0.$$

   (iii) L'équation différentielle $(\mathcal{H})$ possède une solution y non nulle telle que :

   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^{\lambda t} \cdot u(t),$$

   où u est une fonction T-périodique.