
THEOREME D'ARTIN

CALCUL DE $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$

---

1 Développement Eulerien de la fonction Sinus

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un polynôme p_n telle que :

$$\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta) \times p_n(\sin^2\theta)$$

indication : on pourra développer $(cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1}$

2. Déterminer les racines de p_n, et en déduire que

$$p_n(x) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$$

3. Conclure que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(\pi x) = (2n+1)\sin(\frac{\pi x}{2n+1})\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et pour $n \in \mathbb{N}$ telle que $m > |x|$. On pose pour $n > m$:

$$u_{m,n}(x) = \sin(\pi x) = (2n+1)\sin(\frac{\pi x}{2n+1})\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$$

et

$$v_{m,n}(x) = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi x}{2n+1})}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}\right)$$

Montrer que les deux suites $u_{m,n}(x)$ et $v_{m,n}(x)$ sont convergentes dans $\mathbb{R}^*$

5. Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\mathbb{Z}$, on note $v_n(x) = \lim_{n\to+\infty}(v_{m,n}(x))$

Montrer que .....

$$1 \geq v_{m,n}(x) \geq \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4x^2}\right)$$

En déduire que

$$v_m(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

6. En déduire que $\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$

2 Théorème d'Artin-Application

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_n \ : \ \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} e^{-\gamma x} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \dfrac{x}{k}} \end{array}$$

où γ est la constante d'Euler : $\gamma = \lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n))$.
Montrer que la suite $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement dans $\mathbb{R}_+^*$.

On définit la fonction Gamma d'Euler par :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma \ : \ \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Gamma_n(x) = \frac{1}{x} e^{-\gamma x} \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{x}{k}}}{1 + \dfrac{x}{k}} \end{array}$$

8. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que, pour tout $x > 0$:

$$(\ln(\Gamma))''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} \text{ puis que } (\ln(\Gamma))''(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty.$$

9. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

10. Soit $f \ : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant :

$$f(1) = 1 \text{ et } \forall x > 0, f(x+1) = xf(x)$$

Montrer que la fonction :

$$\begin{array}{rcl} S \ : \ \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\frac{f(x)}{\Gamma(x)}\right) \end{array}$$

est 1-périodique, convexe et en déduire que $S = \Gamma$ (Théorème d'Artin).

11. Soit $a > 0$. On définit la fonction :

$$\begin{array}{rrcl} h_a : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\, dt \end{array}$$

Montrer que la fonction h_a est de classe $\mathcal{C}^2$, et que la fonction $\ln(h_a)$ est convexe

12. En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}$$

puis que $\forall x \in]0,1[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

3 Calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}$

13. Montrer que pour tout $a > 0$:

$$\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}$$

et, en déduire que pour tout $x \in]0,1[$:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}$$

14. En déduire que pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$:

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(n+1/2)^2 - x^2}$$

puis que

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) 2^{2k+2} x^{2k}$$

15. En déduire que la fonction :

$$v \ : \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)}$$

est développable en série entière, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}(2k)!} E_{2k}$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E_k = v^{(k)}(0)$: $k$ème nombre d'Euler.

16. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0$$

(on pourra utiliser l'identité : $\dfrac{1}{\cos(x)} \cos(x) = 1$)

(a) Calculer E_0, E_2 et E_4.

(b) Calculer :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \ ; \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^5}$$