Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2021-2022.
Mercredi 6 Octobre 2021.
Réduction des endomorphismes.

Laurent BONAVERO

Table des matières

Leçons concernées

Le contenu de cette séance concerne les leçons de la séance précédente auxquelles se rajoutent les leçons suivantes.
110. Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
151. Réduction d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
156. Valeurs propres. Recherche et utilisation.
163. Endomorphismes diagonalisables. Exemples et applications.
172. Endomorphismes trigonalisables et nilpotents. Applications.
315. Exercices illustrant l'utilisation de vecteurs propres et valeurs propres dans des domaines variés.
317. Exercices sur les endomorphismes diagonalisables ou trigonalisables.
319. Exercices faisant intervenir des décompositions de matrices.
348. Exercices utilisant l'emploi de puissances ou d'exponentielles de matrices.
357. Exercices utilisant le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Révisions de cours

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les chapîtres 5.7 et 5.8 du programme officiel, en plus des chapîtres 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 utilisés lors de la séance précédente.
Voici un quizz qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions. Vous devez être capables de justifier chaque affirmation Vraie et donner un contre-exemple ou un énoncé corrigé pour chaque affirmation fausse.

Répondre par **Vrai** ou **Faux** aux affirmations suivantes.

(1) Deux matrices carrées d'ordre n ayant même trace et même déterminant sont semblables.

(2) Un vecteur a non nul est un vecteur propre d'un endomorphisme u si et seulement si la droite $\mathrm{Vect}(a)$ est u-stable.

(3) Le noyau d'un endomorphisme non injectif est un sous-espace propre.

(4) Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie possède toujours au moins un vecteur propre.

(5) Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie possède toujours au moins un vecteur propre.

(6) Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'une matrice carrée ont les mêmes racines.

(7) Le polynôme minimal d'une matrice carrée est un multiple de son polynôme caractéristique.

(8) Toute racine d'un polynôme annulateur d'une matrice carrée A est une valeur propre de A.

(9) Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux, pour tout endomorphisme u d'un espace vectoriel E, on a

$$\mathrm{Ker}\big(P(u)\big) \cap \mathrm{Ker}\big(Q(u)\big) = \{0_E\}.$$

(10) Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

(11) Une matrice possédant une unique valeur propre est diagonalisable.

(12) Une matrice dont toutes les valeurs propres sont de multiplicité 1 est diagonalisable.

(13) Une matrice carrée vérifiant $A^3 = A$ est diagonalisable.

(14) Si $A = PDP^{-1}$, alors $A^k = P^k D^k P^{-k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(15) Une matrice carrée vérifiant $A^4 = A^3$ est diagonalisable.

(16) Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^4 = A^3$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.

(17) Toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

(18) Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si 0 est sa seule valeur propre.

(19) La seule matrice nilpotente et diagonalisable est la matrice nulle.

(20) Si A et B sont nilpotentes, alors $A + B$ est nilpotente.

(21) Si A et B sont diagonalisables, alors $A + B$ est diagonalisable.

(22) Si A est une matrice diagonalisable, alors $P(A)$ est diagonalisable pour tout polynôme P.

(23) Si A est une matrice nilpotente, alors $P(A)$ est nilpotente pour tout polynôme P.

(24) Si A est une matrice nilpotente et si P est un polynôme, alors $P(A)$ est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

(25) Si A et B commutent et sont diagonalisables, alors $A^k + B^l$ est diagonalisable pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}^2$.

Exercices d'application du cours

Les exercices proposés sont rangés par ordre de difficulté à peu près croissante.

Exercice 1. [Faire ses gammes]

(1) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que A soit diagonalisable.

(2) Même question pour

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. [Faire ses gammes]
Soit A une matrice de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Les deux exercices suivants présentent deux applications de la diagonalisabilité d'une matrice (résolution d'un système différentiel d'une part, étude du comportement asymptotique d'une expérience probabiliste simple d'autre part).

Exercice 3. [Réduction et systèmes différentiels]
Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que A est diagonalisable. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. *On ne demande pas de déterminer* P^{-1} *dans cette question.*

(2) *Cette question peut se traiter sans effectuer le calcul de* P^{-1}.
Soient $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ et $t \mapsto z(t)$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions du système différentiel suivant
$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) &= -x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -3x(t) - 2y(t) - 3z(t) \\ z'(t) &= -3x(t) - 2y(t) - 3z(t) \end{cases}$$
On note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ son vecteur dérivé.

(a) Trouver une expression simple reliant $X(t)$, $X'(t)$ et A.

On définit trois nouvelles fonctions $t \mapsto u(t)$, $t \mapsto v(t)$ et $t \mapsto w(t)$ par la formule
$$Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t).$$

(b) Montrer que $Y'(t) = DY(t)$ (*indication : on observera que* $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$).

(c) En déduire que u, v et w sont chacune solution d'une équation différentielle très simple.
En déduire l'expression générale des fonctions u, v et w puis celle des fonctions x, y et z.

(3) (a) Déterminer P^{-1}.

(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, montrer que $e^{tA} = Pe^{tD}P^{-1}$ puis calculer e^{tA}.

(c) Retrouver le résultat de la question (2c).

Exercice 4. [Faire ses gammes]
On considère deux urnes U et V contenant chacune 3 boules. Au départ, l'urne U contient 3 boules blanches et l'urne V contient 3 boules vertes.
On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (un tirage est donc un échange de 2 boules).
Pour tout entier n, on note X_n le nombre de boules blanches que contient U avant le $(n+1)$-ième tirage (c'est-à-dire après le n-ième échange) et on a donc $X_0 = 3$.
On considère le vecteur de probabilités $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

(1) Pour chaque couple (i,j) d'éléments de $[\![0,3]\!]$, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$. *On distinguera les cas* $j = i-1$, $j = i$, $j = i+1$ *et* $j \notin [\![i-1, i+1]\!]$.

(2) En déduire soigneusement que
$$\forall n \in \mathbb{N}, Y_{n+1} = \frac{1}{9}MY_n \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) Montrer que M est diagonalisable, déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$. Déterminer P^{-1} *à l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel.*

(b) En déduire la limite de la suite de matrices $\left(\frac{1}{9^n}M^n\right)_{n\geq 0}$ lorsque n tend vers $+\infty$. *Il n'est pas utile de déterminer l'expression de M^n pour traiter cette question.*

(4) Déterminer la limite du vecteur Y_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis la valeur moyenne (ou espérance) limite du nombre de boules blanches présentes dans l'urne 1 et commenter le résultat obtenu. *Il n'est pas utile de déterminer l'expression de Y_n pour traiter cette question.*

Du calcul par blocs illustré sur deux situations simples.

Exercice 5. [Encore un classique]
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

(1) Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, calculer $P(B)$.

(2) En déduire que B est diagonalisable si et seulement si $A = 0$.

(3) Soit $C = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 0 & 3A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que C est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Une nouvelle application de la diagonalisabilité à la résolution d'une équation matricielle.

Exercice 6. [Equation matricielle]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer qu'il existe $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^5 + M^3 + M = A$.

(3) Montrer que toute matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^5 + M^3 + M = A$ est diagonalisable.

(4) En déduire qu'il existe une unique matrice $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^5 + M^3 + M = A$. Que se passe-t-il sur $\mathbb{C}$?

Tout est dans le titre !

Exercice 7. [Décomposition de Dunford-Jordan de e^M]
On rappelle le résultat suivant : *pour tout $M \in M_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple de matrices (D, N) tel que D est diagonalisable, N est nilpotente, $DN = ND$ et $M = D + N$.*
Cette décomposition est la décomposition de Dunford-Jordan de M.

(1) Soient $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = D + N$ sa décomposition de Dunford-Jordan.

(a) Montrer que e^D est diagonalisable.

(b) Montrer que $e^N - I_n$ est nilpotente.

(c) Déterminer la décomposition de Dunford-Jordan de e^M.

(2) Résoudre l'équation $e^M = I_n$.