Université Grenoble Alpes

Préparation à l'Agrégation interne 2021-2022.
Mercredi 29 Septembre 2021.
Révisions d'algèbre linéaire.

Laurent BONAVERO

Table des matières

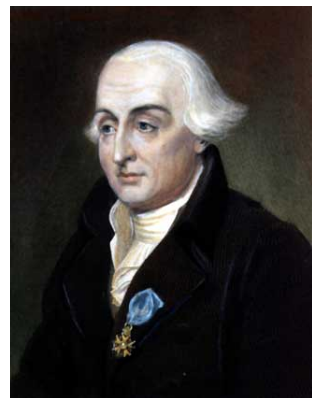
Leçons concernées

Le contenu de cette séance concerne les leçons suivantes.
107. Dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie. Rang d'une famille de vecteurs.
109. Formes linéaires, hyperplans, dualité. On se limitera à des espaces vectoriels de dimension finie. Exemples.
110. Polynômes d'endomorphismes en dimension finie. Applications.
112. Changements de base en algèbre linéaire et en algèbre bilinéaire. Applications.
113. Déterminants. Applications.
114. Opérations élémentaires sur les lignes ou colonnes d'une matrice. Applications. Aspects algorithmiques.
144. Notion de rang en algèbre linéaire et bilinéaires. Applications.
150. Diverses factorisations de matrices. Applications.
155. Systèmes d'équations linéaires. Applications.
310. Exercices d'algèbre linéaire faisant intervenir les polynômes.
311. Exercices illustrant l'utilisation de la notion de rang.
312. Exercices illustrant l'utilisation des matrices inversibles.
313. Exercices illustrant l'utilisation de systèmes d'équations linéaires.
314. Exercices illustrant l'utilisation de déterminants.
353. Exercices utilisant la notion d'endomorphisme nilpotent.

Révisions de cours

Avant cette séance, il est impératif de revoir seuls les paragraphes 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 et 5.6 du programme officiel. Voici un problème qui doit vous permettre de vérifier l'état de vos révisions : il est posé de façon très progressive et illustre une bonne partie des notions fondamentales utilisées en algèbre linéaire (matrice d'une application linéaire, déterminants, isomorphisme, image d'une base par une application linéaire, coordonnées d'un vecteur dans une base, base duale, interpolation polynomiale).

Déterminants de Vandermonde et polynômes interpolateurs de Lagrange.



Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\beta = (1, X, \ldots, X^{n-1})$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soient n un entier ≥ 1, $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $\varphi \ : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ \varphi(P) = \big(P(a_1), \ldots, P(a_n)\big).$$

(1) Montrer rapidement que φ est linéaire.

(2) Déterminer la matrice $A = [\varphi]_{\beta,e}$ de φ dans les bases β et e.

On note

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \det\big((a_i^{j-1})\big).$$

(3) Ecrivons

$$\prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i) = X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k X^k.$$

En effectuant l'opération élémentaire

$$C_n \leftarrow C_n + \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k C_{k+1}$$

trouver une relation entre $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ et $V_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1})$.

(4) En déduire que

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

(5) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un isomorphisme.

On suppose dorénavant que les a_i sont distincts et on note pour $i \in [\![1, n]\!]$:

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

(6) (a) Déterminer $\varphi(L_i)$.

(b) Montrer que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et pour $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1, \ldots, L_n)$.

(c) Déterminer la base duale de $(L_1, \ldots, L_n)$.

(7) Soient $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i. Exprimer ce polynôme à en fonction des b_i et des L_i.

(8) (a) Quelle est la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et e ?

(b) En déduire sans aucun calcul supplémentaire que la matrice de changement de bases de β à $\mathcal{B}$ est égale à A^{-1}. *Indication :* exploiter $\varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$.

Exercices d'application du cours

Les deux premiers exercices permettent de retravailler les notions de noyau et image d'une application linéaire, de sommes (directes) de sous-espaces vectoriels et utilisent le théorème du rang.

Exercice 1. [Autour du théorème du rang]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2.$$

Exercice 2. [Faire ses gammes]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g$ est bijectif et $g \circ f = 0$.

(1) Montrer que $\operatorname{Im}(f) + \operatorname{Im}(g) = E$.

(2) En déduire que $\dim(E) \leq \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

(3) Comparer $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Ker}(g)$.

(4) En déduire finalement que $\dim(E) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$.

Cet exercice très progressif utilise le théorème du rang, vous fait construire une base géométriquement adaptée à un endomorphisme nilpotent et utilise le dictionnaire application linéaire / matrice pour déterminer le commutant d'un endomorphisme.

Exercice 3. [d'après EDHEC 2015]
Soient E un espace vectoriel de dimension 4 et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E tel que

$$u \circ u = 0.$$

(1) Comparer (au sens de l'inclusion) $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$.

(2) En déduire que $\operatorname{rg}(u) \leq 2$.

(3) On suppose dans cette question que $\operatorname{rg}(u) = 1$. Soient $e_1 \in E \setminus \operatorname{Ker}(u)$ et $e_2 = u(e_1)$.

(a) Montrer que $e_2 \in \operatorname{Ker}(u)$ et qu'il existe e_3 et e_4 de sorte que (e_2, e_3, e_4) soit une base de $\operatorname{Ker}(u)$.

(b) Montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E et déterminer la matrice de u dans cette base.

(4) On suppose dans cette question que $\operatorname{rg}(u) = 2$.

(a) Montrer que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$.

(b) Soient (e_1, e_2) une base de $\operatorname{Ker}(u)$.
Montrer qu'il existe deux vecteurs e_3 et e_4 tels que $u(e_3) = e_1$ et $u(e_4) = e_2$ puis montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E.
Déterminer la matrice U de u dans cette base.

(c) Soit
$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$$
le commutant de u.
En caractérisant la matrice V d'un élément v de $\mathcal{C}(u)$ dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4), montrer que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer la dimension de $\mathcal{C}(u)$.

Cet exercice très élémentaire a pour seul but de vérifier que vous savez ce qu'est un projecteur ou une symétrie et que vous savez déterminer sa matrice dans la base canonique.

Exercice 4. [Matrices et géométrie]
On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$$P = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\right\}$$
et $D = \operatorname{Vect}(w)$ où $w = (1, 0, -1)$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

(1) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

(2) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}$, de q et de s.

Les deux exercices suivants sont fondamentaux et démontrent des résultats généraux sur les noyaux et images des itérés successifs d'un endomorphisme en dimension finie (le théorème du rang joue à nouveau un rôle important). Le cas des endomorphismes nilpotents d'indice de nilpotence maximal est étudié en détail.

Exercice 5. [Noyaux et images emboités]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si k est un entier naturel, on pose $K_k = \operatorname{Ker}(f^k)$ (comme d'habitude, $f^0 = \operatorname{Id}_E$ et $f^{k+1} = f^k \circ f$) et $F_k = \operatorname{Im}(f^k)$.

(1) Montrer que $K_k \subset K_{k+1}$ pour tout k.

(2) En déduire qu'il existe un entier $l \leq n$ tel que $K_l = K_{l+1}$.

(3) Soit $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid K_k = K_{k+1}\}$. Montrer que pour tout $k \geq k_0$, alors $K_k = K_{k+1}$.

(4) Montrer que $F_{k+1} \subset F_k$ pour tout k.

(5) En déduire qu'il existe un entier $m \leq n$ tel que $F_m = F_{m+1}$.

(6) Soit $k_1 = \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_k = F_{k+1}\}$. Montrer que pour tout $k \geq k_1$, alors $F_k = F_{k+1}$.

(7) A l'aide du théorème du rang, montrer que $k_0 = k_1$.

(8) *Application numérique.* Traiter le cas de $f\ : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ défini par $f(x,y,z,t) = (y+z, z, 0, 2t)$.

Exercice 6. [Endomorphismes nilpotents]
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on note $n = \dim E$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f est **nilpotent**, c'est-à-dire qu'il existe un entier $m \geq 0$ tel que $f^m = 0$. On note $N = \min\{k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0\}$. L'entier N est appelé **indice de nilpotence de** f.

Question préliminaire. A l'aide de l'exercice précédent, montrer que $N \leq n$.
On suppose **dorénavant** que $N = n$.

(1) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

(2) Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

(3) Montrer que la famille $(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est une famille libre dans $\mathcal{L}(E)$.

(4) Soit $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\}$ ($C(f)$ est le **commutant** de f).

   (a) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ contenant f^k pour tout k. En déduire que $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}) \subset C(f)$.

   (b) Soit $g \in C(f)$. On écrit $g(x_0) = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 f(x_0) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x_0)$ dans E et on pose $h = \lambda_0 \,\mathrm{Id}_E + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1} \in \mathcal{L}(E)$.
   Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $g(f^k(x_0)) = h(f^k(x_0))$.
   En déduire que $g = h$.

   (c) Montrer que $C(f) = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$. Quelle est la dimension de $C(f)$?

Cet exercice élémentaire vous permet d'illustrer de façon pertinente le dictionnaire application linéaire / matrices et démontre un cas très particulier d'un résultat classique : toute matrice carrée est semblable à sa transposée.

Exercice 7. [Faire ses gammes]
Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\varphi\ : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$\forall M \in M_2(\mathbb{R}),\ \varphi(M) = AM - M\,{}^tA.$$

(1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique $e = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $M_2(\mathbb{R})$.

(2) En déduire le rang de φ, une base de l'image et du noyau de φ.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. En déduire que A et ${}^tA$ sont semblables.

Cet exercice (plus délicat que le précédent) vous permettra de revoir le calcul par blocs et de réviser une caractérisation fondamentale du rang d'une matrice : le rang d'une matrice M est égal à la taille de la plus grande matrice inversible extraite de M. Le caractère polynomial du déterminant joue aussi un rôle fondamental dans cet exercice.

Exercice 8. [Un classique]
Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall M \in \mathcal{V},\ \mathrm{rg}(M) \leq r.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\dim(\mathcal{V}) \leq nr$.

(1) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $\mathcal{V}$ contient la matrice bloc $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$.

On suppose donc dorénavant que $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$.

(2) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{V}$ avec A carrée de taille r. Soit C_i une ligne de C, B_j une colonne de B et d_{ij} le coefficient de D correspondant.

(a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\det \begin{pmatrix} A + tI_r & B_j \\ C_i & d_{ij} \end{pmatrix} = 0.$$

(b) En déduire que $D = 0$ et que $CB = 0$.

(3) Montrer que l'application

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{V} \mapsto \begin{pmatrix} A & {}^tC + B \end{pmatrix} \in M_{r,n}(\mathbb{R})$$

est injective.

(4) Conclure.

Nouveautés 2021-2022

Issaï Schur (1875-1941)

Friedrich Engel (1861-1941)

Issaï Schur est un mathématicien d'origine russe qui a surtout travaillé en Allemagne. Un article "élémentaire" portant sur une petite partie de ses travaux est disponible sur le site d'Images des Mathématiques du CNRS :

https ://images.math.cnrs.fr/Les-nombres-de-Schur-des-centenaires-pleins-d-avenir.html

Friedrich Engel est un mathématicien allemand, principalement connu pour avoir édité ou publié les oeuvres de Sophus Lie et de Nikolaï Lobatchevski.

Un théorème de Schur. Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant.

Théorème (Schur, 1905). *Soit V un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ tel que*

$$\forall (M,N) \in V^2,\ MN = NM.$$

Alors

$$\dim(V) \leq \lfloor n^2/4 \rfloor + 1.$$

(1) Montrer qu'il suffit de démontrer le théorème de Schur dans le cas où $V \subset T_n^+(\mathbb{C})$ (on rappelle que $T_n^+(\mathbb{C})$ désigne le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ des matrices triangulaires supérieures).

On suppose désormais que $V \subset T_n^+(\mathbb{C})$. On démontre le théorème par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ étant immédiat, on suppose désormais le résultat démontré en taille $n-1$ et on souhaite le démontrer en taille n. Pour cela, soit $V \subset M_n(\mathbb{C})$ vérifiant l'hypothèse du théorème. On raisonne par l'absurde en supposant que $N = \dim(V) \geq \lfloor n^2/4 \rfloor + 2$.

Soit $(A_1, \ldots, A_N)$ une base de V. Pour chaque A_i, on écrit par blocs $A_i = \begin{pmatrix} & L_i & \\ - & - & - \\ 0_{n-1,1} & | & B_i \end{pmatrix}$ où $L_i \in M_{1,n}(\mathbb{C})$, $0_{n-1,1} \in M_{n-1,1}(\mathbb{C})$ et $B_i \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{C})$.

(2) Montrer que $\dim \mathrm{Vect}(B_1, \ldots, B_N) \leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1$.

On note $k = \dim \mathrm{Vect}(B_1, \ldots, B_N)$.

(3) Construire $N - k$ matrices A'_i appartenant à V, linéairement indépendantes, de la forme $A'_i = \begin{pmatrix} & l_i & \\ - & - & - \\ 0_{n-1,1} & | & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$ avec $l_i \in M_{1,n}(\mathbb{C})$.

(4) Construire de façon analogue $N - l$ matrices A''_j appartenant à V, linéairement indépendantes, de la forme $A''_j = \begin{pmatrix} 0_{n-1,n-1} & | & \\ -- & | & c_j \\ 0_{1,n-1} & | & \end{pmatrix}$ avec $c_j \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ et $l \leq \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1$.

(5) Montrer que $l_i c_j = 0$ pour tout i et pour tout j.

(6) Soit $A \in M_{N-k,n}(\mathbb{C})$ la matrice dont les lignes sont les vecteurs l_i.

(a) Montrer que $\dim \mathrm{Ker}(A) \geq N - l$ et que $\mathrm{rg}(A) \geq N - k$.

(b) En déduire que

$$n \geq 2\left(\lfloor n^2/4 \rfloor - \lfloor (n-1)^2/4 \rfloor + 1\right)$$

et conclure à une contradiction.

Un théorème de Engel : Sur certaines algèbres nilpotentes (Extrait ENS Lyon Second Concours 2021).

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}(E)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des endomorphismes de E. On rappelle qu'une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{V}^2,\ f \circ g \in \mathcal{V}.$$

On dit qu'une sous-algèbre $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est une sous-algèbre nilpotente si tout élément de $\mathcal{V}$ est nilpotent.
Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et si W est un sous-espace vectoriel de E, on dit que W est stable par f si $f(W) \subset W$.

(1) Soit f un endomorphisme nilpotent de E. Montrer que

$$\mathrm{Vect}\Big(f^k \mid k \in \mathbb{N}^*\Big)$$

est une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$, de dimension strictement inférieure à $\dim(E)$.

(2) Donner un exemple de sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n(n-1)/2$ où $n = \dim(E)$.

(3) Soit $\mathcal{V}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$. Le but de cette question est de montrer que

$$\bigcap_{f \in \mathcal{V}} \mathrm{Ker}(f) \neq \{0\}.$$

(a) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel W non nul de E, de dimension minimale, stable par tout élément f de $\mathcal{V}$.

Soit W un tel sous-espace vectoriel.

(b) Soient $w \in W$ un vecteur non nul et $W' = \{f(w) \mid f \in \mathcal{V}\}$.
Montrer que W' est un sous-espace vectoriel de E, stable par $\mathcal{V}$, contenu dans W et tel que $w \notin W'$.

(c) En déduire que

$$W \subset \bigcap_{f \in \mathcal{V}} \mathrm{Ker}(f)$$

et conclure.

(4) Soit $\mathcal{V}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$.
Montrer qu'il existe une base β de E telle que pour tout $f \in \mathcal{V}$, la matrice de f dans la base β est triangulaire supérieure.

(5) En déduire que si $\mathcal{V}$ est une sous-algèbre nilpotente de $\mathcal{L}(E)$, alors

$$\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$$

où $n = \dim(E)$.
Caractériser le cas d'égalité.