I. Les théorèmes de réduction

1) Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace hermitien
($=$ $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire).

Exemple $E = \mathbb{C}^n$
$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i = {}^t\bar{X} Y.$$

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $u^* \in \mathcal{L}(E)$ l'adjoint de u défini par :
$$\forall x, y \in E, \quad \langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$
- Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, l'adjoint de A est la matrice $A^* = {}^t\bar{A}$.

Définition : On dit que u est normal / A est normale si
$$u \circ u^* = u^* \circ u \quad (A A^* = A^* A)$$

Affirmation 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors

(1) $\forall \lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(u)$ est u^*-stable

(2) $\forall \lambda \in Sp(u)$, $E_\lambda(u)^\perp$ est u-stable.

dém (1) Si $x \in E_\lambda(u)$,

$$u(u^*(x)) = u^*(u(x)) = u^*(\lambda x) = \lambda u^*(u)$$

donc $u^*(x) \in E_\lambda(u)$

(2) Soit $x \in E_\lambda(u)^\perp$, $y \in E_\lambda(u)$.

On a :

$$\langle y, u(x) \rangle = \langle \underbrace{u^*(y)}_{\in E_\lambda(u)}, \underbrace{x}_{\in E_\lambda(u)^\perp} \rangle = 0.$$

donc $u(x) \in E_\lambda(u)^\perp$. $\boxtimes$

Théorème (Réduction des endos normaux)

(1) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal, alors u est diagonalisable en base orthonormée.

(2) Si $AA^* = A^*A$, il existe D diagonale et $U \in U_n(\mathbb{C})$ (matrices unitaires) telles que $A = UD\,{}^t\overline{U} = UDU^{-1}$.

dém Par récurrence forte sur $\dim E$.

Soit $\lambda \in Sp(u)$.

- si $E_\lambda(u) = E$, $u = \lambda Id_E$.

• sinon, $E = \underbrace{E_\lambda(u)}_{u\text{-stable}} \oplus^\perp \underbrace{E_\lambda(u)^\perp}_{u\text{-stable}}$

les endos induits

$u : E_\lambda(u) \longrightarrow E_\lambda(u)$

et $u : E_\lambda(u)^\perp \longrightarrow E_\lambda(u)^\perp$

sont encore normaux et on leur applique l'hypothèse de récurrence. $\blacksquare$

2) Matrices hermitiennes

Définition | A est <u>hermitienne</u> si $A = A^*$.
$u \in \mathcal{L}(E)$ est <u>hermitien</u> si $u = u^*$.

<u>Théorème</u> (Réduction des endos / matrices hermitiens)
Soit A une matrice hermitienne. Alors
(1) $Sp(A) \subset \mathbb{R}$.
(2) $\exists U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$, D diagonale réelle telles que $A = UDU^*$.

<u>dém</u>. Soit $\lambda \in Sp(A)$, soit $X \neq 0$ tel que

$AX = \lambda X$

Alors ${}^t\overline{X} A X = \lambda\, {}^t\overline{X} X = \lambda \|X\|^2 \in \mathbb{C}$

On conjugue et transpose cette identité dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{c} {}^t\overline{X}A^*X = \overline{\lambda}\,\|X\|^2 \\ \| \\ {}^t\overline{X}AX = \lambda\,\|X\|^2 \end{array}$$

donc $\lambda = \overline{\lambda}$.

Version endomorphisme :

Si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, on a :

$$\begin{array}{l} \langle x, u(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\|x\|^2 \\ \quad \| \\ \langle u^*(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \overline{\lambda}\|x\|^2 \end{array}$$

donc $\lambda = \overline{\lambda}$ $\boxtimes$.

3) Matrices unitaires

Rappel : U est unitaire

$\Updownarrow$ $U\,{}^t\overline{U} = I_n$

$\Updownarrow$ $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|UX\| = \|X\|$

$u \in \mathcal{L}(E)$ est unitaire

$\Updownarrow$ $u \circ u^* = Id_E$

$\Updownarrow$ $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$

Théorème (Réduction des matrices unitaires)

Soit $U \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$

Alors : (1) $Sp(U) \subset \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| = 1\}$

(2) $\exists\, \Omega \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}), \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$

tels que $U = \Omega \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix} {}^t\overline{\Omega}$

dém si $u(x) = \lambda x$

alors $\|u(x)\| = |\lambda| \, \|x\|$

$\|$

$\|x\|$ donc $|\lambda| = 1$ $\boxtimes$

4) Matrices (endos) symétriques réelles

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien ($=$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire).

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si $u^* = u$ $(\forall x \in E, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle)$.
- $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si $A = {}^tA$.

Une matrice symétrique réelle est en particulier une matrice hermitienne.

En utilisant le théorème de réduction des endos hermitiens, on en déduit que si A est symétrique réelle, alors

(1) $Sp(A) \subset \mathbb{R}$

(2) A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

(3) = (1) + (2) : A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

De plus, si λ et μ sont deux vps de A, si $x \in E_\lambda(A)$, $y \in E_\mu(A)$, on a :

$$\begin{array}{ccc} \langle x, Ay \rangle & = & \mu \langle x, y \rangle \\ \| & & \\ \langle Ax, y \rangle & = & \lambda \langle x, y \rangle \end{array}$$

donc $\langle x, y \rangle = 0$. On a donc :

(4) les sep de A sont 2 à 2 orthogonaux

(5) = (3) + (4) : A est $\mathbb{R}$-diagonalisable

en BON :

$\exists\, \Omega \in O_n(\mathbb{R})$, D diagonale réelle

telles que

$$A = \Omega D\, {}^t\Omega = \Omega D \Omega^{-1}.$$

C'est le <u>thm spectral</u>

5) Matrices orthogonales

Rappel $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$

$\iff {}^t\Omega\Omega = I_n$

$\iff$ les colonnes de Ω forment une BON

$\iff \forall X \in \mathbb{R}^n, \ \|\Omega X\| = \|X\|$.

norme euclidienne standart sur $\mathbb{R}^n$.

Une matrice orthogonale est aussi unitaire.

$Sp(\Omega) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ et si

$e^{i\theta} \in Sp(\Omega)$, alors $e^{-i\theta} \in Sp(\Omega)$

On a donc :

$Sp(\Omega) = \{1, .., 1, -1, .., -1, e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_k}, e^{-i\theta_k}\}$

$\underline{n=2}$

R_θ matrice de rotation

$$O_2(\mathbb{R}) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}}_{SO_2(\mathbb{R})} \cup \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{S_\theta} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

S_θ = matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $D_{\theta/2}$.

$n \geq 3$ $\quad Sp(A) = \{1, 1, -1, \ldots, -1, e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \ldots\}$

et $\exists\, \Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = \Omega \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & R_{\theta_1} \\ & 0 & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix} {}^t\Omega .$$

(Thm de réduction pour les matrices orthogonales)

Conséquences :

- Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales (réflexion orthogonale = symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan). Plus précisément, toute matrice orthogonale est produit de k réflexions avec $k \leq n$.
- Le groupe $O_n(\mathbb{R})$ est compact (fermé et borné) et a deux composantes connexes : $SO_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R})$

$$SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}.$$

En effet, si $A \in SO_n(\mathbb{R})$, il y a un nombre pair de -1 dans le spectre et on a donc

$$A = \Omega \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & R_\pi & & & & \\ & & & & R_\pi & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & R_{\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix} {}^t\Omega$$

Si on pose

$$A(t) = \Omega \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & R_{t\pi} & & & & \\ & & & & R_{t\pi} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & & R_{t\theta_1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & R_{t\theta_k} \end{pmatrix} {}^t\Omega,$$

alors $t \mapsto A(t)$ est un chemin continu de $\underset{A(0)}{\overset{\parallel}{I_n}}$ à $A = A(1)$

Ceci montre que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Puis $O_n(\mathbb{R}) \setminus SO_n(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} A \,;\, A \in SO_n(\mathbb{R}) \right\}$

est aussi connexe par arcs.

- En revanche, $U_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs ($U_1(\mathbb{C}) = S^1$).

Correction de l'exercice 1

Soit $M \in S_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

? Sev stables par M ?

Aff 1 D est une droite stable

$\Longleftrightarrow D = \mathrm{Vect}(a)$ où a est un Vp de M.

Aff 2 P est un plan stable

$\Longleftrightarrow P^\perp$ est une droite stable.

dém $\Rightarrow$ Si $x \in P^\perp$, $y \in P$,

$$\langle y, Mx \rangle = \langle {}^tMy, x \rangle = \langle \underset{P}{\underset{\cap}{My}}, \underset{P^\perp}{\underset{\cap}{x}} \rangle$$

$$= 0$$

$\Leftarrow$ Idem $\boxtimes$

Il suffit donc de trouver les droites stables :

- si $Sp(M) = \{\lambda_1\}$, alors $M = \lambda_1 I_3$ et tout sev est stable
- si $Sp(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ alors M possède 3 droites stables et donc 3 plans stables.

• Si $Sp(M) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2$
l'une des 2 vp, disons λ_1, est simple,
l'autre est double
les droites stables sont donc $E_{\lambda_1}(M)$
et toute droite incluse dans $E_{\lambda_2}(M)$.