II. Matrices symétriques réelles.

1) Des formules pour le spectre.

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres de S.

Affirmation 1

$$\lambda_1 = \max_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{\|X\|^2}$$

et

$$\lambda_n = \min_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{\|X\|^2}.$$

dém Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une BON de Vp associée aux vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Pour $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, écrivons $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$

$$\begin{aligned}
{}^tXSX &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \, {}^tX_i S X_j \\
&= \sum_{i,j} x_i x_j \lambda_j \underbrace{{}^tX_i X_j}_{= \langle X_i, X_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_1 \|X\|^2
\end{aligned}$$

Donc $\frac{{}^tXSX}{\|X\|^2} \leq \lambda_1$ et il y a égalité pour $X = X_1$ ⊠

Plus généralement, on a :

Aff 2 :

$$\lambda_k = \max_{\substack{V \text{ sev de } \mathbb{R}^n \\ \dim V = k}} \ \min_{X \in V \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{\|X\|^2}$$

<u>dem</u> • Soit $V_0 = \mathrm{Vect}(X_1, \dots, X_k)$

Pour $X = \sum_{i=1}^{k} x_i X_i \in V_0 \setminus \{0\}$, on a

$${}^tXSX = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i^2 \geqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \lambda_k \|X\|^2$$

donc $\lambda_k \leq \dfrac{{}^tXSX}{\|X\|^2}$ pour tout $X \in V_0 \setminus \{0\}$

Il y a égalité pour $X = X_k$ donc

$$\lambda_k = \min_{X \in V_0 \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{\|X\|^2}$$

Et donc $\displaystyle \max_{\substack{V \\ \dim V = k}} \ \min \frac{{}^tXSX}{\|X\|^2} \geqslant \lambda_k.$

• Soit V un sev quelconque de dim k.

Comme $\dim \mathrm{Vect}(X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) = n-k+1$,

Grassmann $\Rightarrow V \cap \mathrm{Vect}(X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) \neq \{0\}$

Soit $X_0 \in V \cap \mathrm{Vect}(X_k, X_{k+1}, \dots, X_n) \setminus \{0\}$

$X_0 = \sum_{i=k}^{n} x_i X_i$; ${}^tX_0SX_0 \leq \lambda_k \|X\|^2$

donc $\displaystyle \min_{X \in V \setminus \{0\}} \frac{{}^tXSX}{\|X\|^2} \leq \lambda_k$

Ceci étant vrai pour tout V de dim k,

on a bien

$$\max_{\dim V = k} \min_{\substack{X \neq 0 \\ X \in V}} \frac{{}^tXSX}{\|X\|^2} \leq \lambda_k \qquad \blacksquare$$

Applications :

- $S \longmapsto \lambda_k(S)$ est continue sur $S_n(\mathbb{R})$
- $S \longmapsto \lambda_k(S)$ est croissante sur

$S_n(\mathbb{R})$, muni de l'ordre partiel

$$S_1 \leq S_2 \iff S_2 - S_1 \text{ est une matrice symétrique } \geq 0.$$

2) Matrices symétriques positives / définies positives

Rappel Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

On a : (1) $S \geq 0 \iff \forall X,\ {}^tXSX \geq 0$

$\iff Sp(S) \subset \mathbb{R}^+$

(2) $S \gg 0 \iff S \geq 0$ et $S \in Gl_n(\mathbb{R})$

$\iff Sp(S) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Exemple fondamental.

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM$ et $M{}^tM$ sont symétriques positives ; et définies positives si $M \in Gl_n(\mathbb{R})$.

Théorème (Racine carrée de matrices sym ≥ 0)

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$, $S \geq 0$.
Alors il existe une unique matrice symétrique positive R telle que $R^2 = S$.

dém • Existence (facile)
Ecrivons $S = \Omega D {}^t\Omega$ avec $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$.

et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ $d_i \geq 0$.

Alors $R = \Omega \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix} {}^t\Omega$ convient.

Soit P un polynome tel que $P(d_i) = \sqrt{d_i}$.
(Lagrange !)

Alors $P(D) = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{d_n} \end{pmatrix}$

et $P(S) = R$.

• Unicité
Soit R' une autre racine carrée symétrique ≥ 0
Alors $R'S = R' \times R'^2 = SR'$
donc $R'P(S) = P(S)R'$
donc R et R' commutent.
Elles sont donc simultanément diagonalisables :
$R = Q \Delta Q^{-1}$; $R' = Q \Delta' Q^{-1}$

avec $\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_n \end{pmatrix}$, $\Delta' = \begin{pmatrix} \delta'_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta'_n \end{pmatrix}$

$R^2 = S = R'^2 \Rightarrow \Delta^2 = \Delta'^2$

$\Rightarrow \delta_i^2 = \delta_i'^2$ pour tout i

$\Rightarrow \delta_i = \delta'_i$ pour tout i

$(\delta_i, \delta'_i \geq 0)$

$\Rightarrow \Delta = \Delta'$

$\Rightarrow R = R'$ $\boxed{R}$

Application 1 (exo 3)

$A, B \in S_n^+(\mathbb{R})$

Alors $\det(A+B) \geq \det A + \det B$

dem Si $A \in Gl_n(\mathbb{R})$

Ecrivons $A = C^2$

$M = C^{-1} B C^{-1}$

On a $^tXMX = {}^tXC^{-1}BC^{-1}X$

$= {}^t(C^{-1}X)B(C^{-1}X) \geq 0$

donc $M \in S_n^+(\mathbb{R}) \cap Gl_n(\mathbb{R})$.

De plus,

$\det(A+B) = \det(CC + CMC)$

$= \det(C(I_n + M)C)$

$= (\det C)^2 \underbrace{\det(I_n + M)}_{= \prod (1+\lambda_i(M)) \geq 1 + \prod \lambda_i(M)}$

donc $\det(A+B) \geq \underbrace{(\det C)^2}_{=\det A} + \underbrace{(\det C)^2 \det M}_{=\det(CMC) = \det(B)}$.

Si $A \notin GL_n(\mathbb{R})$,

alors $\underbrace{A + \varepsilon I_n}_{\in S_n^{+}(\mathbb{R})} \in GL_n(\mathbb{R})$ pour $\varepsilon > 0$ petit.

donc $\det(A + \varepsilon I_n + B) \geq \det(A + \varepsilon I_n) + \det(B)$

et on fait tendre ε vers 0

$\boxtimes$

Application 2 : Décomposition polaire.

Théorème

(1) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

Alors, il existe un unique couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$, S symétrique définie positive tel que $M = OS$.

(2) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Alors il existe un couple (O, S) avec $O \in O_n(\mathbb{R})$, S symétrique positive tel que

$M = OS$.

dém (1) Si (O,S) convient, on a

$${}^tM = {}^tS\,{}^tO = S\,{}^tO$$

donc ${}^tMM = S\,{}^tOOS = S^2$

donc S est la racine carrée de ${}^tMM$.

et $O = MS^{-1}$.

Ceci prouve l'unicité.

Pour l'existence, il suffit de vérifier que si S est la racine carrée de ${}^tMM$ et si $O = MS^{-1}$, alors $O \in O_n(\mathbb{R})$.

Or, ${}^tOO = {}^tS^{-1}\,{}^tMMS^{-1} = S^{-1}\,{}^tMMS^{-1}$

$= S^{-1}S^2S^{-1} = I_n$

(2) On pose $M_k = M + \frac{1}{k}I_n$

M_k est inversible, symétrique ≥ 0 pour tout k assez grand.

Il existe donc (O_k, S_k) tel que

$$M + \frac{1}{k}I_n = O_k S_k$$

Comme $O_n(\mathbb{R})$ est compact, on peut extraire de (O_k) une sous-suite convergente $O_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} O$

$$S_{\varphi(k)} = O_{\varphi(k)}^{-1}\left(M + \frac{1}{\varphi(k)}I_n\right) = {}^tO_{\varphi(k)}\left(M + \frac{1}{\varphi(k)}I_n\right)$$

$$\xrightarrow[k\to+\infty]{} {}^tOM$$

Si on pose $S = {}^tOM$, alors S est symétrique ≥ 0 comme limite de matrices symétriques positives et on a bien $M = OS$ $\blacksquare$

Application

$$\begin{array}{ccc} O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$$

est un homéomorphisme (exo)

Comme $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe, il est connexe et on en déduit que $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes ($GL_n^+(\mathbb{R})$ et $GL_n^-(\mathbb{R})$).