

Université Grenoble Alpes
Année 2021/2022
Agrégation interne
Fonction de la variable réelle, suites et séries numériques

Exercice 1. Étudier la continuité de la fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 2. Montrer que les seules applications continues de \mathbb{R} vers \mathbb{Z} sont les applications constantes.

Exercice 3. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 4. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in [a, b], f(x) < g(x).$$

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x) - \alpha.$$

Exercice 5. On cherche les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

1. On suppose f solution et $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer que f est périodique et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2f(x) = f(2x).$$

En déduire que f est nulle.

2. Déterminer toutes les fonctions f solutions.

Exercice 6. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 7. On pose $f : x \mapsto ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$.

1. Montrer que f est une fonction polynomiale de degré n .
2. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
3. Montrer que f possède exactement n racines distinctes dans $] -1, 1[$.

Exercice 8. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 9. Soit f une fonction réelle de classe C^1 positive et décroissante sur $I = [a, b]$.

Soit g une fonction continue sur I . On définit $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ par la relation

$$G(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

1. Montrer qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$G([a, b]) = [m, M].$$

2. Montrer que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t) dt.$$

3. En déduire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt.$$

Exercice 10. 1. Montrer que les suites réelles $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont divergentes.

2. On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}; n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}; n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite. Montrer que cette limite est irrationnelle.

Exercice 11. Soit $n \geq 2$. On considère l'équation $x^n = 1 + x$ sur $[1, +\infty[$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution x_n .

2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n \geq 2}$.

3. Formons un développement asymptotique à deux termes de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.

Exercice 12. 1. Nature de la suite $(E(a^n)^{1/n})$ pour $a > 0$.

2. (a) Établir que $\forall x \geq 0, x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$.
 (b) En déduire la limite de

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

Exercice 13. On considère la suite réelle définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}$.

1. Montrer que x_n est supérieur ou égal à 1 pour tout n .
2. Montrer que si (x_n) converge, sa limite l vérifie $l = \sqrt{2l + 1}$.
3. l étant définie par l'égalité de 2), est-il possible de trouver $k \in]0, 1[$ tel que $|x_n - l| \leq k|x_{n-1} - l|$? Si oui, en déduire que $|x_n - l| \leq k^n|x_0 - l|$.
Conclure.

Exercice 14. Considérons la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0, u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

1. Montrer que (u_n) converge vers 0.
2. En utilisant le théorème de Cesaro, donner un équivalent de (u_n) .

Exercice 15. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme

1. $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$
2. $\sum_{n \geq 0} \ln \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n - 1}{(n^2 + 1)(n^2 + 2n + 2)}$
4. $\sum_{n \geq 3} \frac{2n - 1}{n(n^2 - 4)}$

Exercice 16. Déterminer la nature des séries de terme général u_n .

$$a) u_n = n^{1/n^2} - 1; u_n = \frac{\ln n}{n^2}; u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}; u_n = n^a \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right);$$

$$u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln(n!)}; u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

Exercice 17. Déterminer si la série de terme général u_n est absolument convergente, semi-convergente, ou divergente :

$$a) u_n = \frac{a^n \ln(n)}{\sqrt{n} + 2}; b) u_n = \frac{1 + (-1)^n n}{n^2}; u_n = \frac{\cos^2 n}{n};$$

$$u_n = \cos\left(\pi n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right); u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n} \text{ (on pourra étudier } v_n = u_{2n} + u_{2n+1}\text{)}$$

Exercice 18. 1. On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln 2$.

2. On définit pour $n \geq 1$, v_n par : $v_{3p+1} = \frac{1}{2p+1}$, $v_{3p+2} = \frac{-1}{4p+2}$, $v_{3p} = \frac{-1}{4p}$
 (les termes sont ceux de la série précédente écrits dans un autre ordre).
 Montrer que $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{\ln 2}{2}.$$

Exercice 19. On pose pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ et pour $n \geq 2$, $u_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$.

1. Montrer que f' est intégrable sur $[1, +\infty[$
2. Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.
3. Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.
4. En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 20. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}.$$

1. Donner un équivalent simple de S_n .
2. Montrer que $S_n = \ln n + C + o(1)$.

Exercice 21. 1. On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}.$$

Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que

$$n! \sim k\sqrt{n}n^n e^{-n}.$$

2. Démontrer la formule de Wallis

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{2p(2p-2)\dots 2}{(2p-1)(2p-3)\dots 1} \right)^2 = \pi.$$

On posera $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, on obtiendra une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} puis l'expression de I_{2p} et I_{2p+1} .