Université Grenoble Alpes
Année 2021/2022
Agrégation interne
Compléments suites, séries de Fonction, séries entières, séries de Fourier

Exercice 1. *Soit pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$

Étudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 2. *Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)dt = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$ pour toute application polynômiale P.*
2. *Montrer qu'il existe une suite d'applications polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(P_n f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a, b]$.*
3. *Etablir que $\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt = 0$.*
4. *En déduire que f est l'application nulle.*

Exercice 3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.*

1. *Déterminer le domaine de définition D_S de S.*
2. *Montrer que $(\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n)$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.*
3. *Etudier la convergence normale de $(\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n)$ sur D_S ?*
4. *La fonction S est-elle continue sur son domaine de définition ?*
5. *Calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.*
6. (a) *Montrer que, pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\, dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\, dt.$$

   (b) *En déduire un encadrement de $S(x)$.*
   (c) *Montrer qu'un équivalent de S en 0^+ est $\frac{2}{x^2}$.*

Exercice 4. *On rappelle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et on pose pour $x > 0$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

1. *Justifiez que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.*
2. *Donner le sens de variation de S.*
3. *Montrer que*
$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{e}.$$
4. *Donner un équivalent de S en $+\infty$.*
5. *Donner un équivalent de S en 0.*

Exercice 5. *On considère l'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|)$.*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.
On considère, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \frac{t^n A^n}{n!} \end{array}$$

1. *Montrer que $(\sum\limits_{n\geq 0} u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On appelera S sa somme.*
2. *Montrer que $(\sum\limits_{n\geq 0} u_n')$ converge normalement sur $[-a, a]$ pour $a > 0$.*
3. *Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée en fonction de A et de S.*

Exercice 6. *Soit g définie sur $]-1, 1[$ par $g(x) = \frac{Arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.*

1. *Déterminer une équation différentielle dont g est solution.*
2. *Déterminer le développement en série entière de g à l'origine.*
3. *En déduire le développement en série entière à l'origine de $f(x) = (arccos x)^2$.*

Exercice 7. *Soit $p \in \mathbb{N}$ et*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n.$$

1. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant cette fonction.*
2. *Calculer $f(x)$ en étudiant $(1-x)f'(x)$.*

Exercice 8. 1. *Former de deux manières différentes le développement en série entière en 0 de*

$$f : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt.$$

2. *En déduire la relation*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1}.$$

Exercice 9. *Donner le développement en série entière en 0 de la fonction*

$$x \mapsto \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

et le rayon de convergence.

Exercice 10. *(Développement en série entière de la fonction tangente)*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1, 2a_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0.$$

1. *Calculer a_1, a_2 et a_3.*
2. *Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\left(\sum a_n z^n\right)$ est supérieur ou égal à 1. (On pourra montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq 1$).*
3. *Montrer en effectuant le produit de Cauchy que*

$$\forall |z| < R,\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{2}{e^z + 1}.$$

4. *Montrer que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,*

$$\tan x = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1} a_{2p+1} 2^{2p+1} x^{2p+1}.$$

(On pourra écrire $\tan(x)$ sous forme d'exponentielles complexes, et remarquer que tan *est à valeurs réelles.)*

Exercice 11. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction définie sur $]-\pi, \pi[$ par*

$$f_a(x) = e^{iax}.$$

Déduire si a est non entier, les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(a-n)^2} + \frac{1}{(a+n)^2} \right).$$

Exercice 12. *Soit $a \in]0, \pi[$. On considère la fonction f_a (2π)-périodique et impaire telle que*

$$\forall x \in [0, \pi], \; f_a(x) = \begin{cases} x(\pi - a) & si \; x \in [0, a] \\ a(\pi - x) & si \; x \in [a, \pi] \end{cases}$$

1. *Etudier la série de Fourier de f_a.*
2. *Pour x, $a \in]0, \pi[$ donner les valeurs des sommes*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx \sin na}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2},$$

Exercice 13. *Phénomène de Gibbs.*
Soit f 2π périodique et impaire, telle que $\forall t \in]0, \pi[, f(t) = \frac{\pi}{4}$. On se propose d'etudier la convergence sur $]0, \pi[$ de sa série de Fourier.

1. *Etudier la série de Fourier de f.*
2. *On note S_n la somme partielle*

$$S_n(x) = \sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

   (a) *Montrer que*
$$S_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)} dt.$$

   (b) *Rechercher le premier maximum local de $S_n(x)$ sur $[0, \pi]$ et préciser les coordonnées du sommet correspondant.*

   (c) *Y a t il convergence uniforme sur $[a, \pi - a]$ $(0 < a < \pi/2)$? sur $]0, \pi[$?*