Variables aléatoires à densité

Variables aléatoires réelles, fonction de répartition

On considérera dans tout ce qui suit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et toutes les variables aléatoires seront définies sur cet espace.

Définition

Une variable aléatoire réelle est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *telle que, pour tout nombre réel* x*, l'ensemble* $\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \leqslant x\}$ *appartient à* $\mathcal{F}$*.*
Une variable aléatoire vectorielle est une application $X = (X_1, \ldots, X_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *telle que, pour tout* i*,* X_i *est une variable aléatoire réelle.*

Définition

Soit X *une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de* X *la fonction* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *définie pour tout réel* x *par*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Fonction de répartition

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie pour tout réel x par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x).$$

Si F_X est continue alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Définition

On dit que la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ admet la loi de densité f si la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est continue par morceaux et si, pour tout réel x,

$$F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent, si f est la densité de la loi d'une variable aléatoire, $f \geqslant 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Si la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ admet la loi de densité f alors F_X est continue.
Si F_X est continue et admet une dérivée sauf en un nombre fini de points, alors la loi de X admet une densité donnée par la dérivée de F_X là où cette dérivée existe et par n'importe quelle valeur là où cette dérivée n'existe pas.

Espérance d'une variable aléatoire à densité

Définition

Quand l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f(x)\,\mathrm{d}x$ *converge, on dit que la variable aléatoire* X *de densité* f *est intégrable (ou admet une espérance). Dans ce cas, on pose*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si $E(X) = 0$*, on dit que* X *est centrée.*

Théorème de tranfert

Proposition

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On pose $Y = \varphi(X)$. Alors la variable aléatoire Y est intégrable si et seulement si l'intégrale de la fonction $|\varphi| f_X$ sur $\mathbb{R}$ converge. Dans ce cas,

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, f_X(x)\, \mathrm{d}x.$$

Exemple

Soit $Y = aX + b$ avec $a \neq 0$. Alors Y est intégrable si et seulement si X l'est et dans ce cas, $E(Y) = aE(X) + b$. Pour tout y,

$$F_Y(y) = F_X((y-b)/a) \text{ si } a > 0, \quad F_Y(y) = 1 - F_X((y-b)/a) \text{ si } a < 0.$$

Donc Y admet une densité f_Y donnée par $f_Y(y) = f_X((y-b)/a)/|a|$.

Espérance suite

L'espérance est un opérateur linéaire : si X et Y sont des variables aléatoires réelles intégrables et a et b des nombres réels,

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

L'espérance est un opérateur positif : si $X \geqslant 0$, alors $E(X) \geqslant 0$. Par conséquent, l'espérance préserve l'ordre, c'est-à-dire que si $X \leqslant Y$, alors $E(X) \leqslant E(Y)$.

Définition

Soit X une variable aléatoire continue et p un réel strictement positif. On dit que X admet un moment d'ordre p si $E(|X|^p)$ est fini. Alors $E(X^p)$ existe et on l'appelle le moment d'ordre p de X.

Le cas $p = 2$ est important et la section suivante lui est consacrée.

Deuxième moment

Définition

On dit que la variable aléatoire X est de carré intégrable si et seulement si X^2 est intégrable si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ est finie. Alors,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit f et g deux fonctions telles que f^2 et g^2 sont d'intégrale finie sur $\mathbb{R}$. Alors fg est d'intégrale finie sur $\mathbb{R}$ et

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)^2\mathrm{d}x.$$

Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

une méthode consiste à considérer $h = af \pm bg$ pour deux réels quelconques a et b. Alors $h^2 \geqslant 0$ donc l'intégrale de h^2 est positive ou nulle. En notant $I(\varphi)$ l'intégrale d'une fonction intégrable φ et en élevant au carré, on obtient

$$4a^2b^2I(fg)^2 \leqslant [a^2I(f^2) + b^2I(g^2)]^2.$$

Choisissons $a = \sqrt{I(g^2)}$ et $b = \sqrt{I(f^2)}$. Il vient

$$I(f^2)I(g^2)I(fg)^2 \leqslant I(f^2)^2I(g^2)^2.$$

Si $I(f^2)$ et $I(g^2)$ sont strictement positifs, on a fini. Sinon, supposons par exemple que $I(f^2) = 0$. Donc $f = 0$ partout, $fg = 0$ partout et $I(fg)^2 = 0$ donc l'inégalité est vraie là aussi.

Variance et écart type

Soit f une fonction positive ou nulle. En écrivant $|x|f(x)$ comme le produit $|x|\sqrt{f(x)} \times \sqrt{f(x)}$, on obtient

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

On en déduit le résultat suivant.

Proposition (et définition)

Si X est de carré intégrable, X admet une espérance et

$$E[X]^2 \leqslant E[|X|]^2 \leqslant E[X^2].$$

On définit alors la variance $\mathrm{var}(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$ de X par

$$\mathrm{var}(X) = E[(X - E[X])^2) = E[X^2] - E[X]^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{\mathrm{var}(X)}.$$

Propriétés

1) Si X est de carré intégrable, alors $Y = aX + b$ aussi, pour tous a et b, et $\mathrm{var}(Y) = a^2\mathrm{var}(X)$.
2) Pour toute variable aléatoire X de carré intégrable, $\mathrm{var}(X) \geqslant 0$ et $\mathrm{var}(X) = 0$ si et seulement si X est constante.

Variables aléatoires à densité à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition

Soit $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ *une variable aléatoire .*
(X, Y) *admet une densité* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *si* f *est intégrable et si pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \int_{]-\infty,x]} \int_{]-\infty,y]} f(x, y) dxdy$$

Proposition

Si (X, Y) *admet une densité* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *alors* X *(resp.* Y*) admet une densité* f_X *(resp* f_Y*) donnée par*

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$$

f_X *et* f_Y *sont appelées les densités marginales de* (X, Y).

Calcul de probabilités, théorème de transfert

Soit (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité $f(x, y)$.

1. Soit U un domaine géométriquement simple de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{P}((X, Y) \in U) = \int\int_U f(x, y) dxdy$$

2. Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $|\psi| f$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

$$E[\psi(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \psi(x, y) f(x, y) dxdy$$

Théorèmes de Fubini

Théorème (Théorème de Fubini-Tonnelli)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Alors pour tout I, J intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \times J \subset U$,

$$\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy \right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx \right) dy$$

Théorème (Théorème de Fubini)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout I, J intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \times J \subset U$ et tels que f soit intégrable sur $I \times J$,

$$\int_{I\times J} f(x,y)dxdy = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy \right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx \right) dy$$

Théorème de changement de variables

Théorème (Théorème de changement de variables)

Soit U et V des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \to V$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. Soit $f : V \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable. Alors

$$\int_U f \circ \varphi(x,y) |J\varphi(x,y)| dxdy = \int_V f(x',y')dx'dy'$$

où $J\varphi(x,y) = det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ *si* $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$.

Changement en coordonnées polaires

Exemple

On prend $U =]0, +\infty[\times] - \pi, \pi[$ *et* $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)/x \leq 0\}$ *et*
$\phi : U \to V; (r, \theta) \mapsto (rcos\theta, r \sin\theta)$.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *intégrable ou mesurable positive*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dxdy = \int_U f(rcos\theta, r\sin\theta) rdrd\theta$$

Densité et indépendance

Proposition

Soit (X, Y) *une variable aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *de densité* $f(x, y)$*.*
Soit $f_1(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy$ *et* $f_2(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx$ *les lois marginales.*
X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si* $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ *pour presque tout* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$*.*
S'il existe deux fonctions boréliennes positives φ_1 *et* φ_2 *telles que pour presque tout* (x, y) *de* $\mathbb{R}^2$*,* $f(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$ *alors* X *et* Y *sont indépendantes. De plus* X *a pour densité* $\lambda\varphi_1$ *et* Y *a pour densité* $\frac{1}{\lambda}\varphi_2$ *où* $\lambda = \int_{\mathbb{R}} \varphi_2(y)dy$*.*

Covariance

Proposition

Soient X et Y deux variables aléatoires de carré intégrable telles que (X, Y) admette une densité f. Alors XY est intégrable et

$$|E[XY]| \leq E[|XY|] \leq \sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}$$

Preuve : Notons f_X et f_Y les densités marginales. On a

$$E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} x^2 f(x, y)dxdy$$

$$E[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y)dy = \int_{\mathbb{R}^2} y^2 f(x, y)dxdy$$

En écrivant $|xy|f(x, y) = |x|\sqrt{f(x, y)}\ |y|\sqrt{f(x, y)}$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient le résultat.

Covariance

Définition

La covariance $cov(X, Y)$ *de* X *et* Y *est définie, si* X *et* Y *sont de carré intégrable, par la formule*

$$cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Proposition

Pour toutes variables aléatoires X *et* Y *de carré intégrable,*

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2cov(X, Y),$$

Si de plus X *et* Y *sont indépendantes,*

$$cov(X, Y) = 0 \quad et\ \mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$$

Coefficient de corrélation linéaire

Définition

Toujours dans le cas de carré intégrable, on note

$$\varrho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}}.$$

Donc $-1 \leqslant \varrho(X, Y) \leqslant 1$. Lorsque $|\varrho(X, Y)|$ est proche de 1, on dit que les variables aléatoires sont fortement corrélées.

Matrice de covariance

Définition

Pour toutes variables aléatoires X et Y de carré intégrable, on définit la matrice de covariance $\Gamma(X, Y)$ par :

$$\Gamma(X,Y) = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X) & cov(X,Y) \\ cov(X,Y) & \mathrm{var}(Y) \end{pmatrix}$$

$\Gamma(X, Y)$ est une matrice symétrique positive.

Proposition

*Soit A une matrice 2*2 et B un vecteur colonne 2*1.*
Soit (Z_1, Z_2) définie par $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + B$. *Alors*

$$\Gamma(Z_1, Z_2) = A\Gamma(X,Y)\ {}^tA$$

Lois usuelles à connaître, loi uniforme $U(I)$

Paramètre : I intervalle borné d'intérieur non vide. Densité $|I|^{-1}\mathbf{1}_I$.
Si $I = (a, b)$ avec $a < b$, espérance $(a + b)/2$, variance : $(b - a)^2/12$.
Fonction de répartition $F(x) = 0$ si $x \leqslant a$, $F(x) = (x - a)/(b - a)$ si $a \leqslant x \leqslant b$ et $F(x) = 1$ si $x \geqslant b$.
Si la loi de X est $U([0, 1])$ (uniforme standard) et si $A : x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$, est une application affine, alors la loi de $A(X) = aX + b$ est uniforme sur $A([0, 1])$ qui vaut $[b, a + b]$ si $a > 0$ et $[a + b, b]$ si $a < 0$.

Lois usuelles à connaître, loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$

Paramètre : a réel strictement positif. Densité $a\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathbf{1}_{x\geqslant 0}$.
Espérance $1/a$, variance $1/a$.
Fonction de répartition $F(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-ax}$ si $x \geqslant 0$.
Si la loi de X est $\mathcal{E}(1)$ (exponentielle standard) et si a est un réel positif, alors la loi de aX est $\mathcal{E}(1/a)$.
Construction : horloges. Ou $-\log U$, U uniforme standard.

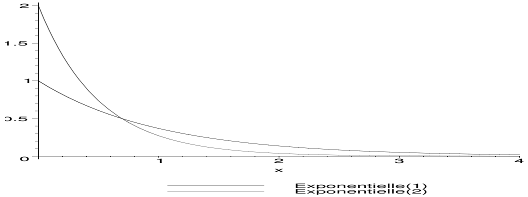


Figure 1. Densité de lois exponentielles

Les lois exponentielles sont les seules lois à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ « sans mémoire », c'est-à-dire telles que, pour tous réels positifs s et t,

$$P(X \geqslant s + t | X \geqslant t) = P(X \geqslant s).$$

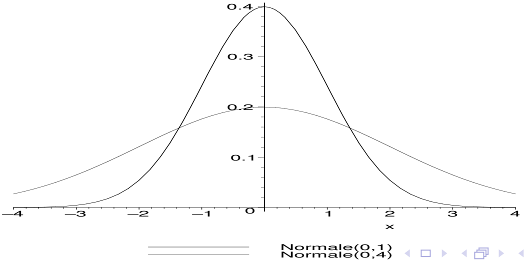
Lois usuelles à connaître, loi normale (ou gaussienne) $\mathcal{N}(m, v)$

Paramètres : m réel et v réel strictement positif. Densité $\mathrm{e}^{-(x-m)^2/(2v)}/\sqrt{2\pi v}$.

Espérance m, variance v.

Si la loi de X est $\mathcal{N}(0,1)$ (gaussienne standard) et si a et b sont des réels, alors la loi de $aX+b$ est $\mathcal{N}(b, a^2)$.

La somme de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(m_k, v_k)$ suit la loi $\mathcal{N}(m, v)$ avec $m = \sum_k m_k, \qquad v = \sum_k v_k$. Construction : loi des erreurs.



Lois usuelles à connaître, loi de Cauchy $C(m, a)$

Paramètres : a strictement positif et m réel. Densité $(a/\pi)/((x-m)^2+a^2)$.
Pas d'espérance ni de variance car les intégrales divergent.
Si la loi de X est $C(0,1)$ (loi de Cauchy standard) et si a et b sont des réels, alors la loi de $aX+b$ est $C(b, a^2)$.
La somme de variables aléatoires indépendantes de loi $C(m_k, a_k)$ suit la loi $C(m, a)$ avec $m = \sum_k m_k$ et $a = \sum_k a_k$.
Construction : Le rapport de deux gaussiennes standard.

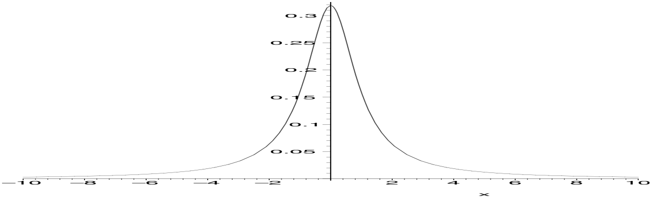


Figure 3. Densité de la loi de Cauchy

Lois usuelles à connaître, loi gamma $G(a, \lambda)$

Paramètres : a et b strictement positifs. Densité

$$b^a \Gamma(a)^{-1} x^{a-1} \mathrm{e}^{-bx} \mathbf{1}_{x>0}.$$

Espérance a/b, variance a/b^2.
Construction : pour tout entier $n \geqslant 1$, la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(b)$ suit la loi $G(n, b)$.

Vecteurs gaussiens

Définition

Soient X *et* Y *deux variables aléatoires réelles.*
(X, Y) *est un vecteur gaussien si il existe un vecteur colonne* $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ *une matrice* A *et deux variables aléatoires indépendantes* Z_1, Z_2 *de loi* $\mathcal{N}(0,1)$ *tels que*

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \mu$$

Remarque

Si (X, Y) *est un vecteur gaussien alors* X *et* Y *suivent une loi normale.*
Attention la réciproque est fausse.
Si (X, Y) *est un vecteur gaussien alors* $E[X] = \mu_1$, $E[Y] = \mu_2$ *et* $\Gamma(X, Y) = A\,{}^tA$.

Vecteurs gaussiens, suite

Proposition

Soit (X, Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance Γ et d'espérance (μ_1, μ_2).
Si Γ est inversible alors (X, Y) admet une densité f donnée par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{d\acute{e}t(\Gamma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1, y-\mu_2)\Gamma^{-1}\begin{pmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{pmatrix}}$$

Preuve : On connait la densité de (Z_1, Z_2) si Z_1, Z_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$ tels que $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} + \mu$.
Elle est donnée par $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)}$
On sait que $\Gamma = A\ {}^tA$. Il suffit alors de faire le changement de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \mu$ pour trouver la densité de (X, Y).